

Vibrações de Nanoplacas

Mário Alexandre Monteiro Oliveira

Dissertação do MIEM

Orientador: Prof. Pedro Manuel Leal Ribeiro



Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

Julho de 2014

*“The pessimist complains about the wind;
the optimist expects it to change;
the realist adjusts the sail.”*

William Arthur Ward

Resumo

Na presente dissertação foi realizado o estudo das vibrações de nanovigas e de três tipos de nanoplacas: simples, de dupla camada e magneto-electro-elásticas.

Recorreu-se às teorias de Euler-Bernoulli e de Kirchhoff para a definição das equações de movimento em função dos esforços para nanovigas e nanoplacas, respetivamente. Foi utilizada a teoria não-local de Eringen para obter as relações constitutivas tendo em conta o parâmetro não-local, sendo assim possível obter as expressões referentes aos diferentes esforços e, conseqüentemente, as equações de movimento em função dos deslocamentos. De referir que os diferentes corpos em estudo (nanovigas e nanoplacas) foram considerados como sendo isotrópicos

Tanto para as nanovigas como para os vários tipos de nanoplacas, recorreu-se ao método de Galerkin para a obtenção de equação diferencial ordinária a partir das equações de movimento.

Os modelos numéricos foram posteriormente implementados no *software Maple*, de modo a obter as frequências e formas naturais para cada um dos casos de estudo. Foi necessário realizar estudos de convergência dos vários resultados obtidos, para que fosse possível conhecer a precisão dos modelos implementados, tendo esses mesmos resultados sido validados através de comparações com valores existentes na literatura atual.

Foi estudado o comportamento das frequências naturais com a variação de parâmetros como as dimensões das estruturas (nanovigas e nanoplacas), o parâmetro não-local e as condições de fronteira. As formas de vibração foram obtidas para diferentes valores do parâmetro não-local e para condições de apoio simples e encastramento.

Abstract

The main purpose of this dissertation resides on the study of vibrations of nanobeams and three types of nanoplates: single, double-layered and magnetoelectroelastic nanoplates.

The Euler-Bernoulli and Kirchhoff theories were used to define the equations of motion in terms of stress resultants to the nanobeams and nanoplates, respectively. In order to obtain the constitutive relations taking into account the non-local coefficient, Non-local Eringen theory was employed, making it possible to acquire the stress resultants and, subsequently, the equations in terms of displacements. The various bodies under study (nanobeams and nanoplates) were considered to be isotropic.

The Galerkin method was used, both for nanobeams as to the various types of nanoplates, in order to obtain ordinary differential equations of motion.

Numerical models were subsequently implemented in Maple software to obtain the natural frequencies and modes of vibration for each of the cases studied. Knowing the accuracy of the implemented models was required, therefore, it became necessary to conduct studies of convergence for the various results obtained. These results were validated through comparisons with existing values in related literature.

Analysis of the behavior of the natural frequencies with the variation of parameters such as the dimensions of the structures (nanobeams and nanoplates), the non-local coefficient and the boundary conditions was performed. The mode shapes of vibration were obtained for different values of the non-local coefficient and for the following boundary conditions: simply supported and clamped, for both nanobeams and nanoplates.

Agradecimentos

À minha família, especialmente aos meus pais, a quem eu gostaria de dedicar este trabalho, por sempre me apoiarem e por sempre terem feito os possíveis e os impossíveis para que nada me faltasse até ao dia de hoje.

Ao Prof. Pedro Leal Ribeiro, por todo o apoio, disponibilidade e incentivo dado neste último semestre, sem o qual não teria sido possível realizar este trabalho.

Por fim, mas não menos importante, a todos os meus amigos, por me proporcionarem os melhores momentos e nunca deixarem de me apoiar nos momentos mais difíceis, sendo também deles este trabalho, por tudo o que contribuíram para a minha formação pessoal.

Índice

1. Introdução	1
1.1. Enquadramento inicial	1
1.2. Revisão bibliográfica	3
1.2.1. Nanovigas	3
1.2.2. Nanoplacas simples	5
1.2.3. Nanoplacas de dupla camada	7
1.2.4. Nanoplacas magneto-electro-elásticas	10
1.3. Objetivos	11
1.4. Estrutura do documento	11
2. Nanovigas	13
2.1. Teoria de Euler-Bernoulli	14
2.2. Teoria não-local de Eringen	15
2.2.1. Formulação	16
2.3. Definição dos esforços	17
2.4. Equações de movimento	17
2.5. Aplicação do método de Galerkin	17
2.6. Estudo de convergência	21
2.7. Validação do modelo	22
2.8. Análise dos resultados	25
2.8.1. Influência das dimensões da nanoviga nas frequências naturais	25
2.8.2. Influência do parâmetro não-local nas frequências naturais	27
2.8.3. Formas de vibração	29
3. Nanoplacas simples	31
3.1. Teoria de Kirchhoff	32

3.2.	Definição dos esforços	34
3.3.	Equações de movimento	35
3.4.	Aplicação do método de Galerkin	35
3.5.	Estudo de convergência	42
3.6.	Validação do modelo	44
3.7.	Análise dos resultados	47
3.7.1.	Influência das dimensões da nanoplaca nas frequências naturais	47
3.7.2.	Influência do parâmetro não-local nas frequências naturais	49
3.7.3.	Formas de vibração	50
4.	Nanoplacas de dupla camada	53
4.1.	Equações de movimento	56
4.2.	Aplicação do método de Galerkin	56
4.3.	Estudo de convergência	63
4.4.	Validação do modelo	65
4.5.	Análise dos resultados	67
4.5.1.	Influência das dimensões da nanoplaca nas frequências naturais	67
4.5.2.	Influência do parâmetro não-local nas frequências naturais	69
4.5.3.	Formas de vibração	71
5.	Nanoplacas magneto-electro-elásticas	75
5.1.	Definição dos esforços	78
5.2.	Equações de movimento	80
5.3.	Aplicação do método de Galerkin	81
5.4.	Estudo de convergência	84
5.5.	Validação do modelo	86
5.6.	Análise dos resultados	92
5.6.1.	Influência das dimensões da nanoplaca nas frequências naturais	93
5.6.2.	Influência do parâmetro não-local nas frequências naturais	94
5.6.3.	Influência do meio elástico nas frequências naturais	98
6.	Considerações finais	101
6.1.	Conclusões	101
6.2.	Trabalhos futuros	102
	Referências	105
	Anexos	111
	Anexo A: Integração por partes de \mathbf{K}_w	111
	Anexo B: Integração por partes de \mathbf{K}_{vv} e \mathbf{K}_{ww}	112
	Anexo C: Operadores diferenciais para as nanoplacas de dupla camada	114
	Anexo D: Componentes da matriz de massa para nanoplacas de dupla camada	115
	Anexo E: Equação de movimento sob a forma matricial para nanoplacas de dupla camada	117
	Anexo F: Definição dos esforços para nanoplacas magneto-electro-elásticas	117
	Anexo G: Expressões de $\mathbf{K}_{ww}^{\text{material}}$, $\mathbf{K}_{ww}^{\text{meio}}$ e $\mathbf{K}_{ww}^{\text{forças}}$	118

Anexo H: Gráficos referentes a nanoplacas magneto-electro-elásticas encastradas	119
Anexo I: Autorização da IOP Publishing	120

Lista de Figuras

Figura 2.1 – Sistema de eixos utilizado na formulação do modelo referente às nanovigas	13
Figura 2.2 – Variação da primeira frequência natural para ambas as condições de fronteira ..	26
Figura 2.3 – Variação da primeira frequência natural com L/h para diferentes valores do parâmetro não-local	26
Figura 2.4 – Variação da razão de frequências com o parâmetro não-local para diferentes valores de L/h	27
Figura 2.5 – Influência do parâmetro não-local na variação das três primeiras frequências naturais para uma nanoviga simplesmente apoiada.....	28
Figura 2.6 – Influência do parâmetro não-local na variação das três primeiras frequências naturais para uma nanoviga encastrada	28
Figura 3.1 – Sistema de eixos utilizado para formular o modelo referente às nanoplacas.....	31
Figura 3.2 – Variação da primeira frequência natural com o comprimento da placa para ambas as condições de fronteira	48
Figura 3.3 – Variação da primeira frequência natural com o comprimento da placa para diferentes valores do parâmetro não-local.....	48
Figura 3.4 – Variação da razão de frequências para diferentes valores do comprimento	49
Figura 3.5 – Variação da razão de frequências referente a diferentes frequências naturais	50
Figura 4.1 – Duas camadas de uma nanoplaca interligadas por forças de van der Waals	53
Figura 4.2 – Variação da primeira frequência natural referente a vibrações em fase com o comprimento, para ambas as condições de fronteira.....	68

Figura 4.3 – Variação da razão de frequências referente a vibrações em fase para diferentes valores do comprimento	69
Figura 4.4 – Variação das diferentes razões de frequências referente a vibrações em fase	71
Figura 5.1 – Ilustração exemplificativa de uma nanoplaca inserida num meio elástico de Pasternak.....	75
Figura 5.2 – Variação da primeira frequência natural adimensionalizada com o aumento da espessura, para diferentes valores de V_0	87
Figura 5.3 – Variação da primeira frequência natural adimensionalizada com o aumento da espessura, para diferentes valores de V_0 (retirada de [74]).....	87
Figura 5.4 – Variação da primeira frequência natural adimensionalizada com o aumento da razão $1/\delta$, para diferentes valores de V_0	88
Figura 5.5 – Variação da primeira frequência natural adimensionalizada com o aumento da razão $1/\delta$, para diferentes valores de V_0 (retirada de [74]).....	88
Figura 5.6 – Variação da primeira frequência natural adimensionalizada com o aumento da razão $1/\eta$, para diferentes valores de V_0	89
Figura 5.7 – Variação da primeira frequência natural adimensionalizada com o aumento da razão $1/\eta$, para diferentes valores de V_0 (retirada de [74]).....	90
Figura 5.8 – Variação da primeira frequência natural adimensionalizada com o aumento da espessura, para diferentes valores de Ω_0	90
Figura 5.9 – Variação da primeira frequência natural adimensionalizada com o aumento da espessura, para diferentes valores de Ω_0 (retirada de [74]).....	91
Figura 5.10 – Variação da primeira frequência natural adimensionalizada com o aumento da razão δ , para diferentes valores de Ω_0	91
Figura 5.11 – Variação da primeira frequência natural adimensionalizada com o aumento da razão δ , para diferentes valores de Ω_0 (retirada de [74]).....	92
Figura 5.12 – Variação da primeira frequência natural para os dois casos em estudo, tendo em conta uma condição de apoio simples	93
Figura 5.13 – Variação da primeira frequência natural com o aumento do comprimento para os dois casos em estudo, tendo em conta uma condição de encastramento.....	94
Figura 5.14 – Variação da primeira frequência natural adimensionalizada para os casos 1 e 2, tendo em conta diferentes valores do parâmetro não-local	95
Figura 5.15 – Variação da primeira frequência natural adimensionalizada para os casos 1 e 3, tendo em conta diferentes valores do parâmetro não-local	95

Figura 5.16 – Variação da razão de frequências para diferentes comprimentos, tendo em conta os vários casos de estudo	96
Figura 5.17 – Variação da razão de frequências referente a diferentes frequências naturais, para os vários os casos de estudo	97
Figura 5.18 – Variação da razão de frequências com o aumento do módulo de Winkler, para os vários casos de estudo	99
Figura 5.19 – Variação da razão de frequências com o aumento do módulo de corte de Pasternak, para os vários casos de estudo.....	99

Lista de Tabelas

Tabela 2.1 – Valores dos diferentes parâmetros utilizados no estudo de convergência.....	21
Tabela 2.2 – Estudo da convergência da primeira frequência natural (Hz) de uma nanoviga .	21
Tabela 2.3 – Estudo da convergência da segunda frequência natural de uma nanoviga.....	22
Tabela 2.4 – Estudo da convergência da terceira frequência natural de uma nanoviga.....	22
Tabela 2.5 – Valores dos diferentes parâmetros utilizados na validação do modelo referente às nanovigas [16]	23
Tabela 2.6 – Validação da primeira frequência natural adimensionalizada para uma nanoviga simplesmente apoiada.....	23
Tabela 2.7 – Validação da segunda frequência natural adimensionalizada para uma nanoviga simplesmente apoiada.....	24
Tabela 2.8 – Validação da terceira frequência natural adimensionalizada para uma nanoviga simplesmente apoiada.....	24
Tabela 2.9 – Validação da primeira frequência natural adimensionalizada para uma nanoviga encastrada	24
Tabela 2.10 – Validação da segunda frequência natural adimensionalizada para uma nanoviga encastrada	25
Tabela 2.11 – Validação da terceira frequência natural adimensionalizada para uma nanoviga encastrada	25
Tabela 2.12 – Valores dos diferentes parâmetros utilizados na obtenção de resultados para uma nanoviga	25

Tabela 2.13 – Valores da primeira frequência natural local (GHz) referentes à figura 2.4	27
Tabela 2.14 – Formas de vibração de uma nanoviga simplesmente apoiada	29
Tabela 2.15 – Formas de vibração de uma nanoviga encastrada.....	30
Tabela 3.1 – Valores dos diferentes parâmetros utilizados no estudo de convergência [54] ...	42
Tabela 3.2 – Estudo da convergência da primeira frequência natural (Hz) de uma nanoplaca simples.....	43
Tabela 3.3 – Estudo da convergência da segunda frequência natural (Hz) de uma nanoplaca simples.....	43
Tabela 3.4 – Estudo da convergência da terceira frequência natural (Hz) de uma nanoplaca simples.....	43
Tabela 3.5 – Valores dos diferentes parâmetros utilizados na validação através de [36, 55] ..	44
Tabela 3.6 – Validação dos valores obtidos para a primeira frequência natural adimensionalizada	45
Tabela 3.7 – Validação dos valores obtidos para a segunda e terceira frequência natural adimensionalizada	45
Tabela 3.8 – Valores dos diferentes parâmetros utilizados na validação através de [44]	45
Tabela 3.9 – Validação das frequências naturais (THz) obtidas através da comparação com valores resultantes de simulações de dinâmica molecular.....	46
Tabela 3.10 – Valores dos diferentes parâmetros utilizadas na validação através de [54].....	46
Tabela 3.11 – Validação dos valores obtidos para a primeira frequência natural (THz) tendo em conta diferentes valores do parâmetro não-local	47
Tabela 3.12 – Validação dos valores obtidos para as frequências naturais (THz) para diferentes condições de fronteira.....	47
Tabela 3.13 – Valores da primeira frequência natural local (GHz) referentes à figura 3.4	49
Tabela 3.14 – Valores das várias frequências naturais locais (GHz) referentes à figura 3.5 ...	50
Tabela 3.15 – Formas de vibração de uma nanoplaca simplesmente apoiada	51
Tabela 3.16 – Formas de vibração de uma nanoplaca encastrada	52
Tabela 4.1 – Estudo da convergência da primeira frequência natural (Hz) para vibrações em fase.....	64
Tabela 4.2 – Estudo da convergência da segunda frequência natural (Hz) para vibrações em fase.....	64
Tabela 4.3 – Estudo da convergência da primeira frequência natural (Hz) para vibrações em oposição de fase.....	64

Tabela 4.4 – Estudo da convergência da primeira frequência natural (Hz) para vibrações em oposição de fase.....	64
Tabela 4.5 – Valores utilizados para a validação do modelo referente às nanoplacas de dupla camada [54]	65
Tabela 4.6 – Valores de várias frequências naturais (THz) para vibrações em fase	66
Tabela 4.7 – Valores das várias frequências naturais (THz) para vibrações em oposição de fase	66
Tabela 4.8 – Valores das frequências naturais (THz) tendo em conta o parâmetro não-local .	66
Tabela 4.9 – Valores das frequências naturais para diferentes valores do parâmetro não-local	67
Tabela 4.10 – Valores da primeira frequência natural referente (GHz) a vibrações em oposição de fase, para ambas as condições de fronteira e tendo em conta diferentes valores do parâmetro não-local	68
Tabela 4.11 – Valores da primeira frequência natural local (GHz) referentes à figura 4.3	69
Tabela 4.12 – Valores da primeira frequência natural (GHz) referente a vibrações em oposição de fase, para ambas as condições de fronteira e tendo em conta diferentes comprimentos	70
Tabela 4.13 – Valores das várias frequências naturais locais (GHz) referentes à figura 4.4 ...	70
Tabela 4.14 – Valores das várias frequências naturais (GHz) referentes a vibrações em oposição de fase, para ambas as condições de fronteira	70
Tabela 4.15 – Formas de vibração de ambas as camadas para vibrações em fase de uma nanoplaca simplesmente apoiada.....	72
Tabela 4.16 – Formas de vibração de ambas as camadas para vibrações em oposição de fase de uma nanoplaca simplesmente apoiada.....	73
Tabela 5.1 – Estudo da convergência da primeira frequência natural (Hz) de uma nanoplaca magneto-electro-elástica.....	85
Tabela 5.2 – Estudo da convergência da segunda frequência natural (Hz) de uma nanoplaca magneto-electro-elástica.....	85
Tabela 5.3 – Estudo da convergência da quarta frequência natural (Hz) de uma nanoplaca magneto-electro-elástica.....	86
Tabela 5.4 – Valores da primeira frequência natural local (GHz) referentes à figura 5.16	96
Tabela 5.5 – Valores das várias frequências naturais locais (GHz) referentes à figura 5.17 ...	97
Tabela 5.6 – Valores da primeira frequência natural (GHz) para o valor máximo de kw referentes à figura 5.18	98

Tabela 5.7 – Valores da primeira frequência natural (GHz) para o valor máximo de kg referentes à figura 5.19	98
--	----

Nomenclatura

A	Área
a	Comprimento da nanoplaca
b	Largura da nanoplaca
C	Coefficiente das forças de van der Waals
CC	Condição de encastramento (<i>clamped</i>)
D	Módulo de rigidez à flexão
E	Módulo de Young
G	Módulo de corte
h	Espessura
I	Segundo momento de área
K	Matriz de rigidez
k_w	Módulo de Winkler
k_g	Módulo de corte de Pasternak
L	Comprimento da nanoviga
M	Momento fletor
M	Matriz de massa
N	Esforço normal
SS	Condição de apoio simples (<i>simply supported</i>)

u	Deslocamento segundo a direção x
v	Deslocamento segundo a direção y
w	Deslocamento segundo a direção z
ε	Deformação
μ	Parâmetro não-local
ρ	Massa volúmica
σ	Tensão
ν	Coefficiente de Poisson
ϕ	Potencial elétrico
φ	Potencial magnético
ω	Frequência
$\bar{\omega}$	Frequência adimensionalizada
\mathcal{L}	Operador diferencial
∇^2	Operador Laplaciano

1. Introdução

1.1. Enquadramento inicial

De acordo com a Comissão Europeia [1] “nanotecnologia é o estudo dos fenómenos e aperfeiçoamento dos materiais a nível atómico, molecular e macromolecular, no qual as suas propriedades se diferenciam significativamente das mesmas a uma maior escala. Já é possível utilizar produtos baseados na nanotecnologia, sendo que analistas esperaram que os seus mercados cresçam de uma forma exponencial durante a próxima década”. Por outro lado, a *National Nanotechnology Initiative* [2] define nanotecnologia como sendo “a compreensão e o controlo da matéria em escala nanométrica, para dimensões entre 1 e 100 nanómetros, onde fenómenos únicos permitem novas aplicações. Abrangendo áreas da ciência e engenharia a uma nanoescala, a nanotecnologia consiste na medição, modelação e manipulação da matéria nessa escala de comprimento”.

A descoberta dos nanotubos de carbono foi realizada por Iijima [3] em 1991, tendo sido este um dos pontos basilares no estudo de diversos componentes à escala nanométrica. Tal como refere Meyyappan [4], os nanotubos de carbono exibem características mecânicas excepcionais, assim como propriedades elétricas únicas, o que levou a que fossem desenvolvidos inúmeros estudos quanto às suas possíveis áreas de aplicação. De acordo com De Volder *et al.* [5], os nanotubos exibem condutividade térmica superior à do diamante, maior resistência mecânica do que o aço e condutividade elétrica superior à do cobre.

A companhia norte-americana *Seldon Technologies* desenvolveu purificadores de águas baseado num sistema de filtragem constituído por nanotubos, fazendo uso da sua grande área superficial (em relação ao seu volume) e das boas capacidades de adsorção dos nanotubos de carbono. A grande área superficial é também uma das razões pela qual têm sido realizados esforços no sentido de utilizar nanotubos de carbono como elétrodos em baterias, de modo a obter uma melhor performance elétrica e uma maior estabilidade mecânica. As excelentes propriedades mecânicas dos nanotubos de carbono levou a que estes se tornassem amplamente usados na área dos compósitos, uma vez que estes possuem a capacidade de criar um extensa

rede que permite distribuir por toda a estrutura os esforços e deformações a que a mesma poderá ser sujeita [5].

É também possível encontrar os nanotubos de carbono em áreas como a medicina, sendo que nanotubos com uma dimensão minuciosamente definida e uma estrutura molecular única poderão ser usados como “pontes”, interligando biomoléculas com microdispositivos, levando a que a ocorrência de determinados eventos biológicos seja traduzida em variações de sinal [4]. No entanto, apesar de os nanotubos de carbono apresentarem um vasto leque de possíveis aplicações, a sua utilização global é ainda reduzida, uma vez que os processos relacionados com sua síntese ainda não se encontram aprimorados para uma produção em larga escala. De acordo com Zhang *et al.* [6], os conhecimentos relativos à eficiência e controlo da produção de nanotubos de carbono, modelos de comercialização e questões ambientais são ainda inadequados, sendo necessário preencher a lacuna ainda existente entre o conhecimento científico e o desenvolvimento industrial.

De um modo semelhante, também as nanoplacas de grafeno se tornaram um dos principais focos de muitos estudos relacionados com nanotecnologia, visto que apresentam propriedades semelhantes aos nanotubos de carbono, sendo caracterizadas pela sua elevada densidade e por uma elevada opacidade, sendo esta umas das propriedades mais improváveis, uma vez que se tratam de nanoplacas que apenas podem possuir a espessura de um átomo [7].

Investigadores suecos e norte-americanos obtiveram sucesso na criação de um novo dispositivo de iluminação a partir de nanoplacas de grafeno, sendo que estes dispositivos apresentam um custo de produção insignificante e são totalmente recicláveis. O seu objetivo passou por encontrar uma alternativa aos agora em voga OLEDs (*Organic light-emitting diodes*), cujos elétrodos consistem numa liga metálica de índio e estanho. A alternativa encontrada foram os LECs (*Light-emitting electromechanical cell*), em que o eletrodo transparente é baseado em nanoplacas de grafeno [8]. Foi também estudado o seu uso como ânodos nas baterias à base de iões de lítio (tipo de baterias atualmente utilizadas nos telemóveis, portáteis, carros elétricos). O principal problema das baterias de lítio atuais reside na sua baixa densidade energética, sendo essa a razão que leva as baterias dos portáteis a necessitarem de pelo menos uma hora para serem recarregadas e que não permite que os automóveis elétricos dependam somente de baterias, necessitando de um dispositivo que tenha a capacidade de fornecer a potência necessária para as acelerações e travagens. A introdução de nanoplacas de grafeno como ânodos nas baterias de lítio aumenta a capacidade de carregamento e de fornecimento de energia até 10 vezes mais rápido, não afetando a elevada capacidade de armazenamento de energia das baterias de lítio [9]. O custo de produção de células de combustível poderá ser bastante reduzido face à possível introdução de nanoplacas de grafeno nas mesmas, com o intuito de estas serem utilizadas como electrocatalisadores, substituindo a platina, que apesar de ser o material mais fidedigno atualmente, apresenta um custo bastante elevado [10].

Por outro lado, de acordo com Rafiee *et al.* [11], as nanoplacas de grafeno apresentam três vantagens em relação aos nanotubos de carbono:

- A rugosidade da superfície das nanoplacas de grafeno, causada pelo processo de exfoliação térmica usado para obter as nanoplacas de grafeno através da grafite, promove uma maior interação entre a superfície da nanoplaca e uma possível matriz polimérica, levando a um aumento da transferência de cargas entre a matriz e as nanoplacas de grafeno;

- As nanoplacas de grafeno apresentam uma maior área superficial do que os nanotubos de carbono, uma vez que tanto a superfície inferior como superior das nanoplacas interagem com o meio, ao contrário da superfície interior dos nanotubos;
- O facto de as nanoplacas de grafeno serem uma estrutura bidimensional (face à estrutura unidimensional dos nanotubos de carbono) permite uma menor propagação de fendas, uma vez que estas ao encontrarem uma estrutura bidimensional são defletidas, ou forçadas a contornarem a mesma, o que leva a uma maior absorção da energia responsável pela propagação das fendas.

As nanoplacas de grafeno também têm aplicações na área da medicina, tal como verificaram Shen *et al.* [12]. Através do uso de nanoplacas baseadas em óxido de grafeno, foi possível realizar a distribuição de fármacos por células específicas do corpo humano, sendo que a realização de uma distribuição semelhante de genes também tem vindo a ser estudada, o que permitiria o tratamento de doenças como fibrose cística, doença de Parkinson e até mesmo cancro.

No entanto, tal como foi referido para os nanotubos de carbono, é necessário aprofundar os conhecimentos sobre as propriedades e os métodos de produção das nanoplacas de grafeno, uma vez que estas não se encontram isentas de possíveis defeitos. Um desses defeitos foi analisado por Song *et al.* [13], tendo verificado a ocorrência de formações de anéis constituídos por sete átomos nas juntas de grão, ao contrário do arranjo hexagonal de seis átomos ao longo da nanoplaca, o que leva a que a sua resistência mecânica seja reduzida para metade nesses pontos, o que pode comprometer diversas das suas aplicações.

Assim sendo, é necessário continuar com os estudos das diferentes propriedades das nanoplacas de grafeno, para que seja possível fazer uso à escala global das suas vastas aplicações.

1.2. Revisão bibliográfica

A realização de uma revisão bibliográfica teve como principal objetivo conhecer os estudos já realizados no âmbito da compreensão das diferentes propriedades dos nanotubos e das nanoplacas. Deste modo, foi possível verificar que uma grande parte dos artigos que usam teorias de meios contínuos elásticos para estudar as propriedades dos nanotubos de carbono fazem referência aos mesmos como sendo nanovigas, uma vez que os nanotubos são um caso particular de nanovigas.

Assim sendo, e uma vez que também serão estudadas três casos específicos de nanoplacas, optou-se por dividir a revisão bibliográfica em quatro secções: nanovigas, nanoplacas simples, nanoplacas de dupla camada e nanoplacas magneto-electro-elásticas.

1.2.1. Nanovigas

O estudo das diferentes propriedades das nanovigas e das nanoplacas tem vindo a ser aprimorado nos últimos tempos, tanto através de simulações de dinâmicas moleculares como através da formulação de teorias referentes a meios contínuos elásticos. Uma vez que se tratam de corpos de dimensões reduzidas, a formulação de teorias capazes de recriar o comportamento dos nanotubos necessitam de considerar o efeito não-local, caracterizado por Eringen [14, 15].

Reddy [16] reformulou as teorias de Euler-Bernoulli, Timoshenko, Reddy e Levinson de modo a que estas tivessem em conta a teoria não-local de Eringen, tendo obtido valores adimensionalizados para a deformação no centro de uma nanoviga, assim como para a sua primeira frequência natural. A partir deste ponto, sempre que uma teoria de vigas tiver em conta a teoria não-local de Eringen será definida como teoria não-local de Timoshenko, por exemplo. Reddy e Pang [17] fazem uso das teorias não-locais de Euler-Bernoulli e de Timoshenko para obter soluções analíticas para a deformação, flexão e frequências naturais, considerando várias condições de fronteira, tendo verificado que a teoria não-local de Timoshenko é mais sensível ao aumento do parâmetro não-local e às diferentes condições de fronteira.

Uma teoria geral para as nanovigas foi formulada por Aydogdu [18], fazendo uso da teoria não-local de Eringen, tendo obtido valores adimensionalizados para as três primeiras frequências naturais de uma nanoviga simplesmente apoiado em ambos os seus extremos. A análise de nanovigas sujeitos a diferentes cargas axiais, assim como a diferentes condições de fronteira, foi realizada por Setoodeh *et al.* [19], tendo obtido uma solução exata para a flexão de nanotubos de carbono simples.

Também Li *et al.* [20] analisaram nanovigas sujeitas a carregamentos axiais, no entanto, o seu modelo formulado para a obtenção das frequências naturais levou a concluir que o aumento do parâmetro não-local levaria a um aumento das frequências naturais, o que contraria a maioria da literatura. Somente Santos e Reddy [21] obtiveram uma variação semelhante ao comparar a teoria não-local de Timoshenko com a teoria das tensões acopladas: enquanto que, para a teoria não-local, as frequências naturais reduzem o seu valor à medida que o parâmetro não-local aumentava, para a teoria das tensões acopladas, as frequências naturais aumentavam o seu valor com o aumento do respetivo parâmetro de escala.

No entanto, esta variação “incorreta” das frequências naturais pode ser refutada através das simulações de dinâmica molecular. Simulações essas que foram utilizadas por Ansari e Sahmani [22] para a obtenção dos valores das frequências naturais para diferentes condições de fronteira, sendo que foram tidas em consideração diferentes quiralidades para a caracterização dos nanotubos de carbono: *armchair* e *zigzag*. Através da comparação dos valores obtidos através das simulações de dinâmica molecular com os valores referentes a teorias não-locais como a de Euler-Bernoulli e a de Timoshenko, foi possível verificar que as frequências naturais diminuem com a presença do parâmetro não-local.

Também foi usado o método dos elementos finitos para obter valores adimensionalizados das frequências naturais, tal como demonstraram Eltaher *et al.* [23], tendo sido consideradas várias condições de fronteira, entre elas a situação de encastramento-extremidade livre. Em contraste com outros artigos da literatura, não foram desprezados os momentos de inércia, o que permitiu visualizar a sua influência nos valores das várias frequências naturais.

Li *et al.* [24] estudaram a velocidade de propagação das ondas de flexão em nanotubos de carbono simples e de múltipla camada, e quais seriam os efeitos nas ondas de flexão causados por um meio elástico a envolver os nanotubos, tendo verificado que o efeito do parâmetro não-local é mais notório em ondas de frequências de ordem elevada. O estudo de nanotubos de carbono com mais de uma camada envolvidos num meio elástico foi também realizado por Ke *et al.* [25], que fez uso da teoria não-local de Timoshenko para analisar as frequências naturais não-lineares de um nanotubo com dupla camada, tendo concluído que quando a constante do meio elástico tende para valores elevados (superiores a 10^{10} Pa), a componente não-linear das frequências naturais pode ser desprezada.

Diferentes geometrias de nanovigas foram analisadas por Murmu e Pradhan [26], que estudaram as frequências naturais em nanovigas de secção transversal não-uniforme, tendo verificado que as frequências naturais obtidas através de uma teoria não-local são superiores às obtidas através de uma teoria clássica até um determinado valor da razão entre as alturas inicial e final da secção transversal do nanotubo. A influência de uma geometria cónica numa nanoviga sujeita a diferentes condições de fronteira foi analisada por Danesh *et al.* [27] e Simsek [28], verificando que esta é irrelevante para frequências de ordem elevada. No entanto, a influência de uma geometria cónica numa nanoviga não é linear, uma vez que depende das condições de fronteira consideradas: provoca um aumento da frequência para uma condição de encastramento em ambos os extremos da nanoviga, mas leva a uma diminuição da frequência caso a nanoviga contenha uma extremidade livre).

Foi também estudada, por Simsek [29], a variação das frequências naturais face à variação da amplitude de vibração de uma nanoviga, tendo sido feito uso da teoria não-local de Euler-Bernoulli. A análise das vibrações em regime forçado foi realizada por Ansari *et al.* [30], tendo sido utilizada a teoria de Gurtin-Murdoch para a introdução de tensões superficiais. A introdução destas tensões superficiais leva a que a máxima amplitude ocorra para valores mais baixos das frequências de excitação.

1.2.2. Nanoplacas simples

De modo semelhante aos nanotubos, também as nanoplacas apresentam propriedades que as tornam bastantes atrativas nos tempos que correm, sendo o grafeno o material mais em voga na sua constituição. Foram realizados trabalhos experimentais por Bunch *et al.* [31], de modo a estudar a possibilidade de utilizar nanoplacas de grafeno como ressonadores eletromecânicos, tendo verificado que estas demonstram uma elevada sensibilidade, sendo que, para baixas temperaturas e com o devido investimento em elevados fatores de qualidade, as nanoplacas de grafeno poderiam rivalizar com os eletrómetros constituídos por transístores de eletrão único. Propriedades como o elevado módulo de Young e a reduzida massa, em contraponto com uma imensa área superficial, são o que tornam as nanoplacas de grafeno ideais para o seu uso como sensores de massa, força e cargas elétricas.

Um estudo semelhante foi conduzido por Sakhaee-Pour *et al.* [32], em que analisaram a capacidade de uma nanoplaca de grafeno poder ser usada como sensor de massas e de poeiras atómicas, tendo verificado que as frequências naturais das nanoplacas são altamente sensíveis à adição de massas de ordem até 10^{-6} fg (10^{-21} g). Sakhaee-Pour *et al.* [33] também analisaram a possibilidade de utilização de nanoplacas de grafeno como sensores de deformação, tendo verificado que a quiralidade das nanoplacas não exerce uma influência significativa na variação das frequências, ao passo que quanto menor forem as dimensões da nanoplaca, maior será a variação das suas frequências para um determinado valor de deformação.

No entanto, para que seja possível utilizar as nanoplacas em diferentes aplicações, é necessário ter a capacidade de prever como as suas características podem ser alteradas caso sejam sujeitas a diversos fatores, sendo que um modo de conhecer a variação dessas características é a criação de modelos matemáticos baseados em teorias de meios contínuos. A reformulação das teorias de Kirchhoff e de Mindlin de modo a estas serem compatíveis com a teoria não-local de Eringen foi realizada por Reddy [34], tendo obtido expressões que permitem calcular as frequências naturais de diferentes ordens. A reformulação da teoria de deformação de corte de terceira

ordem, assim como a formulação das equações de movimento não-lineares para as duas teorias anteriores, foi também responsabilidade de Reddy [35, 36] tendo comparado os resultados da deformação máxima central e das frequências naturais da nanoplaca com os resultados obtidos através de teorias de ordem inferior.

Fazendo uso da teoria não-local de Kirchhoff, Pradhan e Kumar [37] obtiveram as frequências naturais de uma nanoplaca ortotrópica e compararam-nas com as frequências naturais de uma nanoplaca isotrópica, verificando que a condição de ortotropia gera frequências de valor inferior. Foi também analisado o efeito do parâmetro não-local tendo em conta diversas configurações das condições de fronteira, tendo sido possível concluir que uma nanoplaca com todos os seus lados encastrados é a que apresenta uma maior sensibilidade, sendo que uma nanoplaca com todos os seus lados simplesmente apoiados é a configuração que exibe menor sensibilidade.

Recorrendo à mesma teoria, Murmu e Pradhan [38] realizaram o estudo das vibrações de nanoplacas sujeitas a situações de pré-carregamentos axiais, tendo verificado que cargas compressivas originam maiores valores das frequências naturais, sendo que o aumento do parâmetro não-local provoca a diminuição dessas mesmas frequências.

O estudo das vibrações de nanoplacas simples envolvidas num meio elástico foi também realizado por Murmu e Pradhan [39], em que verificam que, para além de as frequências naturais aumentarem na presença de um meio elástico, as mesmas se tornam insensíveis à variação da razão entre o comprimento e a largura da nanoplaca, para valores elevados do parâmetro não-local. Mahdavi *et al.* [40] analisou as vibrações não-lineares de uma nanoplaca envolvida numa matriz polimérica, em que as forças de interação entre a nanoplaca e a matriz são definidas como forças de van der Waals dependentes da deformação transversal. Deste modo, conseguiu verificar que a influência da matriz polimérica vai diminuindo à medida que a ordem das frequências vai aumentando.

Golmakani e Rezatalab [41] também realizaram uma análise não-linear de uma nanoplaca envolvida num meio elástico, sendo que o seu estudo incidiu no comportamento à flexão de uma nanoplaca ortotrópica, tendo analisada a influência dos diferentes parâmetros na deformação central da nanoplaca, tanto para nanoplacas encastradas como simplesmente apoiadas.

Contudo, as abordagens às nanoplacas não se restringiram às teorias clássicas adaptadas para satisfazerem a teoria não-local de Eringen. Arghavan e Singh [42] utilizaram um modelo que define uma nanoplaca como uma estrutura sob a forma de uma grelha cujas células têm a forma de um favo de mel, tendo obtido diferentes valores do módulo de Young consoante a espessura e a geometria da nanoplaca, assim como as frequências e as formas naturais de uma nanoplaca.

Por outro lado, Malekzadeh e Shojaei [43] fizeram uso de uma teoria de dupla variável, em que é considerado que os deslocamentos são definidos por duas componentes distintas: componente de flexão e componente de corte. Deste modo, obtiveram valores para as frequências naturais para várias condições de fronteira, não tendo necessitado de utilizar fatores de correção de corte, o que não invalidou que os resultados obtidos deixassem de ser coerentes com as teorias de deformação de corte (mesmo as de ordem mais elevada).

Do mesmo modo que foi realizado para os nanotubos, também foram utilizadas simulações de dinâmica molecular para validar os diferentes resultados obtidos pelos estudos de diversos autores. Ansari *et al.* [44] fizeram uso destas simulações para validar os valores obtidos através

do seu modelo formulado a partir da teoria de deformação de corte de primeira ordem, o que lhes permitiu definir valores do parâmetro não-local para as diferentes quiralidades que uma nanoplaca de grafeno pode possuir. Analogamente, Ansari e Rouhi [45] recorreram a simulações de dinâmica molecular para validar a sua expressão analítica para o cálculo da primeira frequência natural para as mais variadas condições de fronteira (SSSF, SSCS, FFSS, entre outras), tendo obtido valores característicos do parâmetro não-local para nanoplacas simplesmente apoiadas.

Com o intuito de analisar as nanoplacas de grafeno como possíveis sensores de massa, Murmu e Adhikari [46] formularam um modelo não-local que lhe permitiria prever as mudanças das frequências quando fosse adicionado uma massa exterior à nanoplaca, mais concretamente, bio fragmentos de adenosina, sendo o modelo posteriormente validado com recurso às simulações de dinâmica molecular. No entanto, Liang e Han [47] optaram por usar tais simulações para validar expressões analíticas que permitem determinar o valor do parâmetro não-local para diferentes quiralidades, tendo verificado que o mesmo depende das dimensões da estrutura em questão, mas não das cargas a que a mesma pode estar sujeita.

Também foram estudadas nanoplacas em regime forçado, sendo um desses estudos referentes a Liu e Chen [48], que analisaram a resposta de uma nanoplaca finita e periódica em regime forçado através das transformadas de Fourier, tendo obtido a variação do deslocamento e da deformação de corte com o aumento da frequência de excitação, face à variação de diferentes parâmetros. Já Assadi [49] estudou as vibrações forçadas de uma nanoplaca tendo em consideração diferentes propriedades do material referentes às superfícies exteriores, baseado na teoria de Gurtin-Murdoch. Através deste estudo, foi possível concluir que existe um “eixo neutro” em forma de elipse na superfície de uma nanoplaca, para o qual, caso seja aplicado um carregamento concentrado em qualquer ponto da curva elíptica, as propriedades da superfície não exercem efeito na resposta da nanoplaca.

1.2.3. Nanoplacas de dupla camada

A evolução do número de aplicações em que é possível recorrer às nanoplacas de grafeno levou a que fosse considerado a criação de nanocompósitos constituídos por várias nanoplacas de grafeno, tornando as nanoplacas com duas (ou mais camadas) uma das matérias de discussão em voga.

Contudo, foi necessário ajustar a formulação utilizada para as nanoplacas simples, de modo a que esta tivesse em consideração as forças de van der Waals, que são as forças responsáveis pela união das diferentes camadas constituintes da nanoplaca. Deste modo, Kitipornchai *et al.* [50] definiram a expressão que permite caracterizar as forças de van der Waals, tendo verificado que ambas as camadas possuem idênticas formas de vibração quando é tida em conta a frequência fundamental, sendo que as formas de vibração relacionadas com as restantes frequências de ressonância apresentam direções opostas, devendo-se este fenómeno às forças de van der Waals. He *et al.* deram continuidade ao estudo anterior na referência [51], onde estudaram a possibilidade de utilizar nanoplacas de grafeno com múltiplas camadas como ressonadores, em que, para além de obter os valores dos coeficientes relacionados com as diferentes interações de van der Waals entre várias camadas, formularam expressões que permitem o cálculo das frequências naturais de nanoplacas com dupla e tripla camada. Tendo verificado que as formas de vibração associadas às diferentes frequências de ressonância não

são idênticas para todas as camadas, os autores concluíram que é possível utilizar nanoplacas com várias camadas como ressonadores de altas frequências.

Behfar e Naghdabadi [52] foram também uns dos responsáveis pelos estudos iniciais das nanoplacas com várias camadas, não só pela obtenção de expressões que permitem o cálculo das frequências naturais de nanoplacas com dupla camada, como por terem verificado que à medida que a razão entre as dimensões aumenta, a diferença entre frequências consecutivas diminui.

A reformulação das teorias de Kirchhoff e de Mindlin para que estas incluíssem as forças de van der Waals e fossem capazes de reproduzir o comportamento de uma nanoplaca de dupla camada foi da responsabilidade de Pradhan e Phadikar [53], tendo analisado a variação da razão de frequências face à variação de parâmetros como a espessura e o módulo de Young.

Fazendo uso da teoria de Kirchhoff reformulada para uma nanoplaca com um determinado número de camadas, Sarrami-Foroushani e Azhari [54] obtiveram os valores das frequências naturais para uma nanoplaca com 15 camadas, tendo ainda obtido as formas naturais de ressonância de uma nanoplaca com 5 camadas, permitindo observar as diferenças existentes entre as formas de vibração de cada camada para as diferentes frequências de ressonância.

No entanto, tal como se havia verificado para as nanoplacas simples, foram também utilizadas outras teorias não-clássicas para prever o comportamento de nanoplacas com dupla camada, como foi o caso de Sohby [55], tendo recorrido à teoria de variável dupla que define os deslocamentos como sendo definidos por duas componentes distintas, sendo que o autor acrescentou uma função de forma ψ para variar a ordem da teoria (terceira ordem, hiperbólica ou sinusoidal). Deste modo, foi capaz de analisar nanoplacas simples e nanoplacas com várias camadas sujeitas a cargas mecânicas e cargas térmicas, tendo verificado que a evolução da temperatura crítica de flexão é inversamente proporcional ao aumento das dimensões da nanoplaca, assim como ao aumento do parâmetro não-local.

O estudo da propagação das ondas de Lamb em nanoplacas de dupla camada foi realizado por Liu e Yang [56], que analisaram especialmente a influência do parâmetro não-local na velocidade de propagação das ondas com frequências de diferentes ordens.

Porém, o foco da maior parte dos estudos foram as nanoplacas com múltipla camada envolvidas num meio elástico, tendo sido o primeiro estudo realizado por Liew *et al.* [57], no qual se verifica que a primeira frequência natural de uma nanoplaca com mais de uma camada é independente das forças de van der Waals, mas que é dependente do módulo do meio elástico, sendo que um aumento do mesmo provoca a redução do valor da frequência. Foram também analisadas as formas de vibração, verificando-se que estas são dominadas pelas forças de van der Waals, sendo que o módulo do meio elástico afeta apenas ligeiramente a razão de amplitudes, mas não as direções de vibração.

Contudo, e contrariamente ao que havia sido analisado anteriormente, Ansari *et al.* [58] estudaram as vibrações de nanoplacas com várias camadas envolvidas num meio elástico, tendo verificado que as frequências naturais aumentam com a existência de um meio elástico.

Wang *et al.* [59] realizaram uma análise das vibrações de nanoplacas com quatro e cinco camadas envolvidas numa matriz elástica, em que verificaram que o meio elástico apenas tem influência nas frequências naturais correspondentes a formas de vibração em fase. Um estudo semelhante foi realizado por Pradhan e Phadikar [60] mas considerando nanoplacas

ortotrópicas, tendo posteriormente verificado que a influência do parâmetro não-local diminui à medida que o módulo do meio elástico aumenta. A análise das frequências naturais de nanoplacas com múltiplas camadas e geometrias variadas foi realizada por Babaei e Shahidi [61], que analisaram nanoplacas oblíquas, rômbricas (em forma de losango) e trapezoidais, assim como retangulares.

No entanto, uma vez os diferentes estudos mencionados consideraram as nanoplacas como sendo simplesmente apoiadas, foram surgindo outros artigos que analisaram diferentes condições de fronteira, como foi o caso da referência [62]. Foram analisados os efeitos do módulo de Winkler, do módulo de corte, do número de camadas e de diferentes condições de fronteira nos valores das frequências naturais. É também realizada a divisão das formas de vibração em três classes: formas de vibração sincronizadas e de baixa ordem, sendo independentes das forças de van der Waals e ligeiramente afetadas pelo meio elástico; formas de vibração realçadas pelas forças de van der Waals e de ordem intermédia, sendo menos sensível ao meio elástico envolvente que as de ordem inferior; formas de vibração mistas e de ordem elevada, sendo resultados da combinação entre as duas formas anteriores.

Ansari *et al.* [63] também estudaram as vibrações de nanoplacas com diferentes condições de fronteira, tendo até considerado diferentes condições de fronteira para várias camadas da mesma nanoplaca. Deste modo, conseguiram verificar que a frequência fundamental é independente do número de camadas e das forças de van der Waals caso todas as camadas estejam sujeitas às mesmas condições de fronteira. O método dos elementos finitos foi utilizado também por Ansari *et al.* [64] para a comparação das frequências naturais de uma nanoplaca de dupla camada sujeita a diferentes condições de fronteira, tendo verificado que, de modo semelhante às nanoplacas simples, a condição de encastramento é a mais sensível à influência do parâmetro não-local.

Ghorbanpour Arani *et al.* [65] realizaram o estudo de um sistema constituído por duas nanoplacas de dupla camada acopladas e envolvidas num meio elástico do tipo visco-Pasternak, sendo que o acoplamento das nanoplacas foi definido de modo semelhante ao meio elástico. Deste modo, verificaram que o módulo de Winkler exerce uma maior influência na razão de frequências do que o módulo de Pasternak, tendo ainda realizado a comparação da influência dos diferentes meios na razão de frequências face ao aumento do parâmetro não-local, que lhes permitiu concluir que o meio de Pasternak é o menos sensível ao aumento do parâmetro não-local, sendo que o meio do tipo visco-Winkler é o mais sensível.

Uma teoria tridimensional foi utilizada por Alibeigloo [66], tendo também feito uso de expansões por séries de Fourier para obter as equações de movimento em função dos deslocamentos para nanoplacas com várias camadas e envolvidas numa matriz polimérica, permitindo-lhe verificar que a influência do parâmetro não-local é superior em nanoplacas quadrangulares (quando comparadas com nanoplacas retangulares), assim como o facto de a espessura não exercer uma influência significativa sobre o efeito do parâmetro não-local.

A análise temporal do deslocamento de ambas as camadas constituintes de uma nanoplaca de dupla camada quando sujeita a uma força transiente em degrau foi da responsabilidade de Arghavan e Singh [67], tendo analisado os efeitos das forças de van der Waals nas vibrações não-lineares da nanoplaca. Para tal, definiram a nanoplaca como sendo uma estrutura sob a forma de grelha cujas células têm a forma de um favo de mel, tendo verificado que as forças de van der Waals não exercem influência nas vibrações no plano da nanoplaca.

1.2.4. Nanoplacas magneto-electro-elásticas

Face às evoluções que tem havido no campo dos materiais inteligentes, estudos referentes a materiais piezoelétricos e piezomagnéticos têm vindo a ser desenvolvidos. Pan [68] foi um dos primeiros a estudar placas com propriedades magneto-electro-elásticas, formulando um modelo capaz de analisar a variação de diversos parâmetros ao longo da espessura da placa, tal como o deslocamento elástico segundo x (u), o “deslocamento elétrico” (D) e a indução magnética (B). Pan e Heyliger deram continuação ao estudo anterior em [69], em que obtêm as frequências e formas naturais para diversas constituições das placas magneto-electro-elásticas, tendo verificado que algumas formas naturais são puramente elásticas, ou seja, o acoplamento entre as diferentes fases elétrica e magnética não induz nem potenciais elétricos nem magnéticos, pelo que os deslocamentos elásticos não exibem diferenças significativas para os vários casos considerados.

Um estudo semelhante foi realizado por Chen *et al.* [70], no qual, para além de obterem os valores das frequências naturais para diferentes constituições da placa, dividem as vibrações em duas classes: a primeira é caracterizada por existir no plano da placa, sendo que tanto o deslocamento transversal como os potenciais elétrico e magnético são nulos; a segunda é caracterizada por nenhum dos deslocamentos ser nulo, assim como os potenciais elétrico e magnético. O facto de a primeira classe ser independente dos dois potenciais vem comprovar os estudos de Pan e Heyliger.

Xue *et al.* [71] realizaram a comparação das curvas de deformação não-linear de placas magneto-electro-elásticas com as de placas elásticas, piezoelétricas e piezomagnéticas, assim como investigaram as diferenças existentes entre a deformação linear e a não-linear de uma placa magneto-electro-elástica. Deste modo, conseguiram concluir que, para um determinado carregamento, a deformação é maior numa placa piezoelétrica, sendo que a menor deformação acontece para as placas piezomagnéticas.

A utilização de um método modificado de Pagano para a obtenção das diferentes frequências naturais de uma placa magneto-electro-elástica com múltiplas camadas e simplesmente apoiada foi da responsabilidade de Wu e Lu [72], o que lhes permitiu estudar a variação de diferentes parâmetros ao longo da espessura da placa, tal como o campo de tensões e os potenciais elétrico e magnético. Por outro lado, Sladek *et al.* [73] recorreram ao método local de Petrov-Galerkin para comparar a evolução da deformação e dos diferentes potenciais ao longo das várias dimensões da placa, tendo considerado não só placas simplesmente apoiadas, como também placas encastradas.

Li e Zhang [74] estudaram as vibrações de uma placa magneto-electro-elástica envolvida num meio de Pasternak, fazendo uso de uma teoria de deformação de corte de primeira ordem, tendo analisado o comportamento da frequência natural adimensionalizada face à variação de diferentes parâmetros. Assim, foram capazes de verificar não só que as frequências naturais aumentam face a um potencial elétrico positivo e diminuem face a um potencial magnético positivo, mas também que diminuem com o aumento dos módulos referentes ao meio elástico (módulo de Winkler e módulo de corte de Pasternak).

A análise de vibrações forçadas foi realizada por Milazzo [75], que formulou um modelo que define uma placa magneto-electro-elástica com várias camadas como sendo uma placa com apenas uma camada, sendo que foram obtidos valores das frequências naturais tendo em conta dois casos em que a indução elétrica e magnética assumem diferentes valores nas superfícies

superior e inferior da placa. Deste modo, foi também analisada a resposta em frequência face à aplicação tanto de cargas mecânicas como de cargas elétricas.

A única obra encontrada na literatura que incide sobre nanoplacas magneto-electro-elásticas é da autoria de Li *et al.* [76], na qual são estudadas a flexão e as vibrações naturais de uma nanoplaca magneto-electro-elástica envolvida num meio de Pasternak, tendo sido verificado que as frequências naturais diminuem com o potencial elétrico e com a presença de um meio elástico, sendo que sofrem um aumento face à presença de um potencial magnético.

1.3. Objetivos

Esta dissertação, tal como o título o indica, tem como principal objetivo estudar as vibrações de nanoplacas. Para que tal fosse possível, foi necessário:

- Compreender as principais teorias responsáveis por definir o comportamento à flexão de vigas e de placas;
- Estudar teorias que tivessem em conta o efeito de pequena escala, tal como a Teoria de Elasticidade Não-local de Eringen;
- Formular as equações de movimento que traduzissem o comportamento de nanoviga e de nanoplacas;
- Compreender a influência da introdução do parâmetro não-local nos modelos numéricos responsáveis pela obtenção das frequências e formas naturais, primeiro para as nanovigas e, posteriormente, para as nanoplacas;
- Estudar a convergência dos resultados obtidos pelos modelos numéricos formulados no *software Maple*;
- Validar os mesmos resultados obtidos através da sua comparação com valores existentes na literatura atual;
- Realizar a análise da influência de diversos parâmetros, tal como as dimensões, o parâmetro não-local e as condições de fronteira, nas frequências e formas naturais das nanovigas e das nanoplacas.

1.4. Estrutura do documento

Esta dissertação encontra-se organizada em seis capítulos, em que no presente capítulo é realizado o enquadramento inicial e a revisão bibliográfica, sendo também apresentados os objetivos e a estrutura da dissertação.

Os capítulos 2 - 5 abordam os diferentes casos estudados (nanotubos, nanoplacas simples, nanoplacas de dupla camada e nanoplacas magneto-electro-elásticas). No capítulo 2 é ainda definida a teoria não-local de Eringen, assim como a formulação que leva à expressão referente às relações constitutivas não-locais. Nos quatro capítulos são definidas as equações de movimento e a respetiva aplicação do método de Galerkin às mesmas, para que fosse possível formular o modelo no *software Maple*. Em cada um dos capítulos é realizado um estudo de convergência, assim como a validação dos valores obtidos pelo respetivo modelo através da sua comparação com valores existentes na literatura atual, sendo que a secção final de cada capítulo diz respeito à análise dos resultados obtidos.

No capítulo 6 – Conclusões – são apresentadas as principais conclusões da realização da dissertação, sendo também sugeridos possíveis trabalhos futuros relacionados com o tema da dissertação.

No final deste documento encontram-se as referências utilizadas para a realização da dissertação, assim como um conjunto de anexos onde se encontram definidas algumas expressões referentes a matrizes de rigidez e de massa, bem como tabelas e figuras que não foram inseridas nos capítulos anteriores.

2. Nanovigas

Apesar de não ser o foco da dissertação, foi abordada a temática das nanovigas com o intuito de compreender qual seria a influência da teoria não-local na criação de um modelo que permitisse analisar as frequências e modos naturais, uma vez que a sua formulação exige menos uma variável que os problemas referentes às nanoplacas. De referir que esta formulação permite o estudo das vibrações de nanotubos de carbono, uma vez que estes se tratam de um caso específico de nanovigas.

Deste modo, recorreu-se à teoria de Euler-Bernoulli para formular e criar o modelo matemático que permitisse obter as frequências e modos naturais, respeitando a Teoria de Elasticidade Não-local de Eringen [14, 15].

O sistema de eixos utilizado na formulação da teoria de Euler-Bernoulli encontra-se definido na figura 2.1.

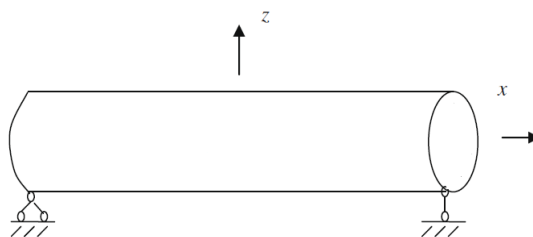


Figura 2.1 – Sistema de eixos utilizado na formulação do modelo referente às nanovigas

A obtenção das equações de movimento foi conseguida através do princípio dos deslocamentos virtuais [77] e do princípio de Hamilton [78]. De acordo com Reddy [16], uma vez que o princípio dos trabalhos virtuais é independente das relações constitutivas, as equações de movimento definidas em função dos esforços são válidas tanto para as teorias locais como para as não-locais.

Assim sendo, é possível definir os esforços presentes na teoria de Euler-Bernoulli de acordo com as seguintes equações:

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma_{xx} dA \\ M &= \int_A z \sigma_{xx} dA \end{aligned} \quad (2.1)$$

2.1. Teoria de Euler-Bernoulli

De acordo com a literatura [16, 18, 77], o campo de deslocamentos para a teoria de Euler-Bernoulli é definido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u_x(x, z, t) &= u(x, t) - z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \\ u_y &= 0 \\ u_z(x, z, t) &= w(x, t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

em que u e w são os deslocamentos axial e transversal, respetivamente, num ponto do plano médio da nanoviga ($z = 0$).

No que diz respeito à definição do campo de deformações, não foi considerada a componente não-linear de von Kármán, levando a que a única componente do campo de deformações cujo valor não é nulo seja assim definida:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.3)$$

De referir que, por motivos de simplificação das expressões, se optou por omitir os argumentos das diferentes funções.

Assim sendo, foi possível recorrer ao princípio de Hamilton com o intuito de obter as equações de movimento em função dos esforços:

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \delta U + \delta V - \delta K dt \quad (2.4)$$

em que δU é a energia de deformação virtual, δV é o trabalho virtual realizado pelas forças aplicadas, e δK é a energia cinética virtual [79], definidas de acordo com as seguintes expressões:

$$\delta U = \int_{-L/2}^{L/2} \int_A \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} dA dx = \int_{-L/2}^{L/2} \int_A \sigma_{xx} \left(\frac{\partial \delta u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right) dA dx = \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial N}{\partial x} \delta u - \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} \delta w \, dx \\
K &= \frac{1}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_A \rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \right)^2 + \rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} \right)^2 dA dx \\
\delta K &= \int_{-L/2}^{L/2} \rho A \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \rho A \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} + \rho I \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial t} \, dx
\end{aligned} \tag{2.6}$$

sendo que será desprezado o termo referente a ρI , uma vez que não exerce uma influência significativa no resultado final [23], portanto:

$$\delta K = \int_{-L/2}^{L/2} \rho A \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \rho A \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} \, dx \tag{2.7}$$

Caso se considere que não existem forças aplicadas na nanoviga, o trabalho virtual realizado pelas forças aplicadas, δV , assume o valor nulo.

Deste modo, a expressão referente ao princípio de Hamilton assume a seguinte forma:

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial N}{\partial x} \delta u - \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} \delta w - \rho A \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \rho A \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} \, dx dt \tag{2.8}$$

Agrupando os termos em relação aos deslocamentos virtuais δu e δw , são obtidas as equações de movimento em função dos esforços:

$$\begin{aligned}
\delta u : \quad \frac{\partial N}{\partial x} &= \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
\delta w : \quad -\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} &= \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Assim sendo, foi necessário compreender a teoria não-local para que fosse possível, posteriormente, definir os esforços.

2.2. Teoria Não-local de Eringen

Nos últimos anos, face à importância que a nanotecnologia tem vindo a assumir e à necessidade de modelar os seus mecanismos de reduzida escala, têm vindo a ser utilizadas teorias que são influenciadas pela dimensão do corpo em análise.

A teoria mais em voga é a Teoria da Elasticidade Não-local, formulada por Eringen em 1983 [15], podendo até ser usada para caracterizar a dinâmica de uma grelha atômica (tal como Eringen verificou em 2002 [14]), o que a torna extremamente vantajosa, uma vez que permite evitar o enorme esforço computacional associado às simulações de dinâmicas moleculares ou de discretização dos átomos.

A caracterização da dinâmica de uma grelha atômica por parte de Eringen envolveu a consideração de átomos como sendo pontos interligados por molas e a posterior verificação de

que a energia potencial do sistema (energia interna) era função da distância entre os átomos, ou seja, de um modo análogo, seria função da variação do comprimento das molas que interligariam os átomos.

2.2.1. Formulação

De acordo com a Teoria de Elasticidade Não-local, o campo de tensões num ponto de referência x de um corpo elástico contínuo não só depende do campo de deformações nesse ponto, como também depende do campo de deformações de cada ponto x' do corpo.

Deste modo, as equações de movimento, assim como o tensor de tensões não-local σ , podem ser escritos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j} + f_i &= \rho \ddot{u}_i \\ \sigma_{ij} &= \int_V \alpha(|x' - x|, \tau) t_{ij}(x') dx'\end{aligned}\tag{2.10}$$

em que $t(x')$ é o tensor de tensões macroscópico (clássico) num ponto x' e que está relacionado com o tensor de deformações no mesmo ponto através da lei de Hooke generalizada:

$$t_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}\tag{2.11}$$

O parâmetro não-local é definido pela função $\alpha(|x' - x|, \tau)$, em que τ é uma constante do material que depende dos comprimentos interno (a) e externo (l) característicos da grelha atômica, definido pela seguinte expressão:

$$\tau = \frac{e_0 a}{l}\tag{2.12}$$

sendo e_0 um parâmetro característico de cada material, permitindo que o modelo seja ajustado de modo a ser compatível com resultados experimentais ou outras teorias.

As propriedades da função $\alpha(|x' - x|, \tau)$ encontram-se definidas em [15]. Assim, esta é definida como uma função de Green de um operador diferencial linear \mathcal{L} , ou seja:

$$\mathcal{L}\alpha(|x' - x|, \tau) = \delta(|x' - x|)\tag{2.13}$$

levando a que a relação não-local seja reduzida à seguinte forma:

$$\mathcal{L}\sigma_{ij} = t_{ij}\tag{2.14}$$

sendo que a equação do movimento passa a ser definida pela seguinte expressão:

$$t_{ij,j} + \mathcal{L}(f_i - \rho \ddot{u}_i) = 0\tag{2.15}$$

Através da comparação de curvas de dispersão com modelos de grelhas atômicas, foi proposto por Eringen que o operador diferencial fosse definido de acordo com a expressão que se segue:

$$\mathcal{L} = 1 - (e_0 a)^2 \nabla^2\tag{2.16}$$

sendo assim possível estabelecer a expressão geral que define as relações constitutivas:

$$[1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] \sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (2.17)$$

Deve ser ainda referido que daqui em diante será usada a seguinte notação, por motivos de simplificação:

$$\mu = (e_0 a)^2 \quad (2.18)$$

Assim sendo, foi possível definir os esforços tendo em conta a teoria não-local de Eringen.

2.3. Definição dos esforços

Tendo em conta a teoria não-local enunciada anteriormente, foi possível definir a relação constitutiva para o tensor de tensões [16]:

$$\sigma_{xx} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} = E \varepsilon_{xx} \quad (2.19)$$

De salientar que quando o parâmetro não-local, μ , apresenta um valor nulo, é obtida a relação constitutiva clássica.

Assim sendo, e tendo em conta as equações (2.1) e (2.19), foram definidos os seguintes esforços:

$$\begin{aligned} N - \mu \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} &= EA \frac{\partial u}{\partial x} \\ M - \mu \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} &= -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (2.20)$$

2.4. Equações de movimento

As equações de movimento em função dos deslocamentos foram definidas com recurso às equações (2.9) e (2.20), tendo em conta que a secção transversal é uniforme:

$$\begin{aligned} EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu \rho A \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} \\ EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &= \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \mu \rho A \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \end{aligned} \quad (2.21)$$

2.5. Aplicação do método de Galerkin

Para que fosse possível resolver as equações diferenciais com derivadas parciais, optou-se por utilizar o método de Galerkin, uma vez que este permite obter equações diferenciais ordinárias que podem depois ser facilmente resolvidas. Assim sendo, e tendo em conta o método de

Galerkin enunciado por Meirovitch [80], é possível definir os deslocamentos u e w de acordo com as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{i=1}^n g_i(x) q_i(t) \\ w(x, t) &= \sum_{i=1}^n f_i(x) q_i(t) \end{aligned} \quad (2.22)$$

em que as funções $g_i(x)$ e $f_i(x)$ são funções de forma que definem a variação dos respetivos deslocamentos ao longo da nanoviga, definidas de acordo com [81]. Quanto às funções $q_i(t)$, estas são responsáveis por definir a variação dos deslocamentos ao longo do tempo, sendo que n é o número total de funções de forma utilizadas para definir os deslocamentos. De referir que, apesar de ter sido considerado o mesmo número de funções de forma que caracterizam ambos os deslocamentos, este não necessita obrigatoriamente de ser igual.

De modo a permitir a resolução do problema, foi necessário definir as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u(u(x, t)) &= 0 \\ \mathcal{L}_w(w(x, t)) &= 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

em que os diferentes operadores são definidos de acordo com as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u(u(x, t)) &= EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mu \rho A \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} \\ \mathcal{L}_w(w(x, t)) &= EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \mu \rho A \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \end{aligned} \quad (2.24)$$

A definição de um modelo para nanovigas passa pela formulação das matrizes de massa e de rigidez da nanoviga de modo a ser possível obter as frequências e modos naturais. As componentes das diversas matrizes são definidas recorrendo-se às expressões abaixo:

$$\begin{aligned} \int_{-L/2}^{L/2} g_i(x) \mathcal{L}_u(u(x, t)) dx \\ \int_{-L/2}^{L/2} f_i(x) \mathcal{L}_w(w(x, t)) dx \end{aligned} \quad (2.25)$$

no entanto, uma vez que as funções de forma utilizadas na formulação do modelo encontram-se definidas segundo variáveis adimensionais (ξ), foram realizados os seguintes ajustamentos:

$$x = \frac{L}{2} \xi \quad dx = \frac{L}{2} d\xi \quad \frac{d}{dx} = \frac{2}{L} \frac{d}{d\xi} \quad (2.26)$$

levando a que as expressões (2.25) assumam a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{L}{2} \int_{-1}^1 g_i(\xi) \mathcal{L}_u(u(\xi, t)) d\xi \\ \frac{L}{2} \int_{-1}^1 f_i(\xi) \mathcal{L}_w(w(\xi, t)) d\xi \end{aligned} \quad (2.27)$$

Assim sendo, foi necessário definir as expressões responsáveis pela formulação de cada matriz, isto é, entender quais dos termos das expressões (2.27) são referentes às matrizes de massa e às matrizes de rigidez, tendo em conta as expressões (2.24).

Em seguida, serão definidas as componentes da matriz de rigidez referentes aos deslocamentos u e w :

$$\begin{aligned} K_u[i, j] &= \frac{2}{L} \int_{-1}^1 g_i(\xi) EA \frac{\partial^2 g_j(\xi)}{\partial \xi^2} d\xi \\ K_w[i, j] &= \frac{8}{L^3} \int_{-1}^1 f_i(\xi) EI \frac{\partial^4 f_j(\xi)}{\partial \xi^4} d\xi \end{aligned} \quad (2.28)$$

No entanto, de modo a que apenas existam derivadas das funções de forma de ordem igual a metade da ordem do problema (um problema de flexão é um problema de quarta ordem), tendo também o intuito de reduzir um possível acréscimo no esforço de computação, optou-se pela simplificação das expressões (2.28) através do método de integração por partes:

$$K_u[i, j] = \frac{2}{L} EA \int_{-1}^1 g_i(\xi) \frac{\partial^2 g_j(\xi)}{\partial \xi^2} d\xi \quad (2.29)$$

em que a resolução do integral passa pelos seguintes passos:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 g_i(\xi) \frac{\partial^2 g_j(\xi)}{\partial \xi^2} d\xi &= g_i(\xi) \frac{\partial g_j(\xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=-1}^{\xi=1} - \int_{-1}^1 \frac{\partial g_i(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial g_j(\xi)}{\partial \xi} d\xi \\ g_i(1) &= 0 \quad \vee \quad \frac{\partial g_j(\xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} = 0 \\ g_i(-1) &= 0 \quad \vee \quad \frac{\partial g_j(\xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=-1} = 0 \\ \int_{-1}^1 g_i(\xi) \frac{\partial^2 g_j(\xi)}{\partial \xi^2} d\xi &= - \int_{-1}^1 \frac{\partial g_i(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial g_j(\xi)}{\partial \xi} d\xi \end{aligned} \quad (2.30)$$

As relações definidas em (2.30) são válidas para várias condições de fronteira, entre as quais se inclui o apoio simples e o encastramento, que irão ser as condições de fronteira utilizadas no cálculo das frequências e formas naturais.

Assim sendo, a expressão que define as componentes da matriz de rigidez longitudinal assume a seguinte forma:

$$K_u[i, j] = -\frac{2}{L}EA \int_{-1}^1 \frac{\partial g_i(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial g_j(\xi)}{\partial \xi} d\xi \quad (2.31)$$

De um modo análogo, foi obtida a expressão que define as componentes da matriz de rigidez de flexão, sendo que os passos intermédios referentes à integração por partes encontram-se definidos no Anexo A:

$$K_w[i, j] = \frac{8}{L^3}EI \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 f_i(\xi)}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 f_j(\xi)}{\partial \xi^2} d\xi \quad (2.32)$$

Quanto às expressões que definem as componentes da matriz de massa referentes aos deslocamentos u e w , estas são definidas de acordo com as expressões:

$$\begin{aligned} M_u[i, j] &= -\frac{L}{2} \int_{-1}^1 g_i(\xi) \rho A g_j(\xi) d\xi + \frac{2}{L} \int_{-1}^1 g_i(\xi) \mu \rho A \frac{\partial^2 g_j(\xi)}{\partial \xi^2} d\xi \\ M_w[i, j] &= -\frac{L}{2} \int_{-1}^1 f_i(\xi) \rho A f_j(\xi) d\xi + \frac{2}{L} \int_{-1}^1 f_i(\xi) \mu \rho A \frac{\partial^2 f_j(\xi)}{\partial \xi^2} d\xi \end{aligned} \quad (2.33)$$

Assim sendo, de acordo com o referido anteriormente, recorreu-se novamente ao método de integração por partes de modo a simplificar as expressões anteriores:

$$M_u[i, j] = -\frac{L}{2} \rho A \int_{-1}^1 g_i(\xi) g_j(\xi) d\xi + \frac{2}{L} \mu \rho A \int_{-1}^1 g_i(\xi) \frac{\partial^2 g_j(\xi)}{\partial \xi^2} d\xi \quad (2.34)$$

Uma vez que o primeiro termo da expressão já se encontra simplificado, apenas foi necessário aplicar o método de integração por partes ao segundo termo. No entanto, e visto que a ordem das derivadas parciais é idêntica à da expressão das componentes da matriz de rigidez referentes ao deslocamento u , é possível concluir que o segundo termo da expressão (2.34) assumirá a seguinte forma:

$$\int_{-1}^1 g_i(\xi) \frac{\partial^2 g_j(\xi)}{\partial \xi^2} d\xi = - \int_{-1}^1 \frac{\partial g_i(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial g_j(\xi)}{\partial \xi} d\xi \quad (2.35)$$

Assim sendo, as componentes da matriz de massa referente ao deslocamento u são definidas de acordo com a seguinte expressão:

$$M_u[i, j] = -\frac{L}{2} \rho A \int_{-1}^1 g_i(\xi) g_j(\xi) d\xi - \frac{2}{L} \mu \rho A \int_{-1}^1 \frac{\partial g_i(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial g_j(\xi)}{\partial \xi} d\xi \quad (2.36)$$

Analogamente, é apresentada a expressão que define as componentes da matriz de massa referentes ao deslocamento w :

$$M_w[i, j] = -\frac{L}{2} \rho A \int_{-1}^1 f_i(\xi) f_j(\xi) d\xi - \frac{2}{L} \mu \rho A \int_{-1}^1 \frac{\partial f_i(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial f_j(\xi)}{\partial \xi} d\xi \quad (2.37)$$

Encontram-se assim definidas as expressões necessárias para a criação das matrizes de rigidez e de massa e, consequentemente, obter resultados para as frequências e modos naturais de

vibração de nanovigas. Deste modo, foi possível definir a forma matricial das equações de movimento:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_w \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_u(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}_w(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_w \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_u(t) \\ \mathbf{q}_w(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

De referir que, ao implementar o modelo numérico no *software Maple*, foram consideradas expressões simétricas às presentes nas equações (2.31) - (2.37) para que as diferentes matrizes fossem positivas definidas, respeitando, assim, o seu significado físico. Esta operação foi também realizada para os capítulos seguintes.

2.6. Estudo de convergência

Uma vez que método de Galerkin é baseado num determinado número n de funções de forma, considerou-se relevante definir o número de funções de forma a partir do qual os resultados estabilizam, isto é, quando a diferença entre resultados obtidos para dois números consecutivos de funções de forma deixa de ser relevante.

Deste modo, foram obtidos resultados para as três primeiras frequências naturais, tendo sido utilizadas desde 4 até 11 funções de forma. Os valores utilizados para definir os parâmetros referentes à geometria e material de uma nanoviga são apresentados na tabela 2.1.

Tabela 2.1 – Valores dos diferentes parâmetros utilizados no estudo de convergência

L (nm)	h (nm)	E (TPa)	ν	ρ (kg/m ³)
10,00	1,00	1,00	0,25	2300,00

As condições de fronteira foram definidas como simplesmente apoiadas em ambos os extremos da nanoviga. Considerou-se que os valores obtidos para as frequências naturais ao utilizar 11 funções de forma seriam os valores de referência, pelo que foi registada a diferença (em valor absoluto) entre esse valor e os restantes valores obtidos para um número inferior de funções de forma, tal como se pode observar nas tabelas 2.2 - 2.4.

Uma vez que os valores da frequência se encontram em Hz, a relevância das diferenças por vezes podem ser de difícil compreensão, tendo, por isso, se optado por também obter o erro relativo entre os valores, de modo a facilitar a compreensão da tabela. De referir que o número elevado de casas decimais foi apenas utilizado de modo a permitir a perceção das diferenças existentes entre os vários valores obtidos.

Tabela 2.2 – Estudo da convergência da primeira frequência natural (Hz) de uma nanoviga

n	ω_1^i	$ \omega_1^i - \omega_1^{i=11} $	Erro relativo (%)
4	94.578.827.266,720	27.999.379,87520	0,02961
5	94.550.840.743,930	12.857,08569	0,00001
6	94.550.840.743,930	12.857,08569	0,00001
7	94.550.827.888,477	1,63190	0,00000
8	94.550.827.888,477	1,63190	0,00000
9	94.550.827.886,845	0,00009	0,00000
10	94.550.827.886,845	0,00009	0,00000
11	94.550.827.886,845	0,00000	0,00000

Tabela 2.3 – Estudo da convergência da segunda frequência natural de uma nanoviga

n	ω_2^i	$ \omega_2^i - \omega_2^{i=11} $	Erro relativo (%)
4	379.804.525.936,484	1.601.214.434,09100	0,42337
5	379.804.525.936,484	1.601.214.434,09100	0,42337
6	378.210.211.665,499	6.900.163,10602	0,00182
7	378.210.211.665,499	6.900.163,10602	0,00182
8	378.203.320.721,360	9.218,96698	0,00000
9	378.203.320.721,360	9.218,96698	0,00000
10	378.203.311.502,394	0,00098	0,00000
11	378.203.311.502,393	0,00000	0,00000

Tabela 2.4 – Estudo da convergência da terceira frequência natural de uma nanoviga

n	ω_3^i	$ \omega_3^i - \omega_3^{i=11} $	Erro relativo (%)
4	1.042.579.739.938,700	191622286460,51300	50,66648
5	865.428.333.354,125	14470879875,93800	3,82622
6	865.428.333.354,124	14470879875,93700	3,82622
7	851.165.724.980,114	208271501,92700	0,05507
8	851.165.724.980,114	208271501,92700	0,05507
9	850.958.465.427,218	1011949,03101	0,00027
10	850.958.465.427,217	1011949,03003	0,00027
11	850.957.453.478,187	0,00000	0,00000

Verifica-se que a partir do uso de 7 funções de forma a variação existente deixa de ser significativa. No entanto, por motivos de maior precisão, serão usadas 11 funções de forma, uma vez que a variação no esforço computacional é insignificante.

2.7. Validação do modelo

Com o intuito de validar o modelo criado, ou seja, compreender se os valores obtidos seriam coerentes, optou-se pela comparação dos resultados com os valores existentes na literatura.

Deste modo, foi possível averiguar se a formulação das componentes que contêm o parâmetro não-local estariam corretas.

Assim sendo, recorreu-se aos seguintes artigos para comparar os resultados obtidos:

- [16], uma vez que este fornece não só valores adimensionalizados para a primeira frequência natural, como também faz referência a uma expressão matemática que permite calcular tais frequências;
- [18], visto que fornece valores, também eles adimensionalizados, não só para a primeira, como para a segunda e terceira frequências naturais;
- [23], uma vez que este fornece valores das diferentes frequências naturais para nanotubos com condições de fronteira encastradas.

Os valores utilizados em ambas as comparações para definir os parâmetros característicos dos nanotubos são valores sem unidades, tal como se encontra definido nos artigos acima referidos.

Tabela 2.5 – Valores dos diferentes parâmetros utilizados na validação do modelo referente às nanovigas [16]

L	E	ν	ρ
10,00	$30,00 \times 10^6$	0,30	1,00

Ainda que não seja referido em nenhum dos artigos, foi sempre considerado que $b = h$, apesar de ser irrelevante para o resultado, uma vez que se tratam de valores adimensionalizados.

Em seguida refere-se a expressão utilizada para adimensionalizar as frequências:

$$\bar{\omega} = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \quad (2.39)$$

A tabela 2.6 estabelece uma comparação entre os valores obtidos para a primeira frequência natural adimensionalizada através do *software Maple*, os valores fornecidos pelo artigo do Reddy [16] e os valores obtidos através de uma expressão matemática, também retirada do mesmo artigo. As condições de fronteira foram definidas como sendo simplesmente apoiadas em ambos os extremos da nanoviga.

Uma vez que não existem diferenças entre os valores obtidos através do modelo criado no *software Maple* e os obtidos através da equação até pelo menos à quinta casa decimal, é possível afirmar que o modelo formulado se encontra apto para o cálculo da primeira frequência natural de um nanotubo.

Tabela 2.6 – Validação da primeira frequência natural adimensionalizada para uma nanoviga simplesmente apoiada

L/h	μ	$\bar{\omega}_1$	Reddy [16]	Equação [16]
100	0	9,86960	9,8696	9,86960
	0.5	9,63474	9,6347	9,63474
	1	9,41588	9,4159	9,41588
	1.5	9,21129	9,2113	9,21129
	2	9,01948	9,0195	9,01948
	4	8,35692	8,3569	8,35692
20	0	9,86960	9,8696	9,86960
	0.5	9,63474	9,6347	9,63474
	1	9,41588	9,4159	9,41588
	1.5	9,21129	9,2113	9,21129
	2	9,01948	9,0195	9,01948
	4	8,35692	8,3569	8,35692

As seguintes tabelas (2.7 e 2.8) são referentes à comparação com o artigo de Aydogdu [18] dos valores da segunda e terceira frequência natural, para um nanotubo com as condições de fronteira definidas como sendo simplesmente apoiadas em ambos os extremos.

Verifica-se, novamente, que o modelo formulado apresenta resultados coerentes com os existentes na literatura atual, com diferenças relativas abaixo do 1%, restando somente verificar se é adequado para condições de fronteira que não simplesmente apoiadas.

Tabela 2.7 – Validação da segunda frequência natural adimensionalizada para uma nanoviga simplesmente apoiada

L/h	μ	$\bar{\omega}_2$	Aydogdu [18]	Diferença relativa (%)
10	0	39,4784	39,4784	0,00004
	1	33,4277	33,2731	0,46458
	2	29,5111	29,2992	0,72327
	3	26,7115	26,4764	0,88798
	4	24,5823	24,3384	1,00213
20	0	39,4784	39,4784	0,00004
	1	37,6635	37,6496	0,03698
	2	36,0779	36,0535	0,06774
	3	34,6771	34,6445	0,09403
	4	33,4277	33,3888	0,11645

Tabela 2.8 – Validação da terceira frequência natural adimensionalizada para uma nanoviga simplesmente apoiada

L/h	μ	$\bar{\omega}_3$	Aydogdu [18]	Diferença relativa (%)
10	0	88,8264	88,8264	0,00004
	1	64,6414	63,5445	1,72622
	2	53,3079	52,0886	2,34072
	3	46,4000	45,1995	2,65589
	4	41,6285	40,4759	2,84760
20	0	88,8264	88,8264	0,00004
	1	80,3517	80,2169	0,16801
	2	73,9161	73,7066	0,28417
	3	68,8143	68,5611	0,36936
	4	64,6414	64,3618	0,43444

Assim sendo, foi realizada a comparação entre os resultados obtidos para as três primeiras frequências naturais e os valores que constam do artigo de Eltaher *et al.* [23], para condições de fronteira definidas como encastradas em ambos os extremos do nanotubo, tal como é possível verificar através das tabelas 2.9 - 2.11. De referir que se optou por realizar a comparação para uma razão L/h de valor 100, de modo a reduzir a possível influência do termo ρI , descartado no presente modelo, mas não por Eltaher *et al.* [23].

Assim sendo, e dado que a diferença relativa entre os resultados obtidos e os valores que constam da literatura, é possível afirmar que o modelo é capaz de prever com elevada precisão os valores das frequências naturais de um nanotubo.

Tabela 2.9 – Validação da primeira frequência natural adimensionalizada para uma nanoviga encastrada

L/h	μ	$\bar{\omega}_1$	Ref. [23]	Diferença relativa (%)
100	0	22,3733	22,3744	0,00498
	1	21,1090	21,1096	0,00268
	2	20,0328	20,0330	0,00099
	3	19,1029	19,1028	0,00059
	4	18,2894	18,2890	0,00228

Tabela 2.10 – Validação da segunda frequência natural adimensionalizada para uma nanoviga encastrada

L/h	μ	$\bar{\omega}_2$	Ref. [23]	Diferença relativa (%)
100	0	61,67282	61,6847	0,01925
	1	50,98317	50,9844	0,00242
	2	44,39475	44,3920	0,00620
	3	39,82662	39,8220	0,01159
	4	36,42393	36,4184	0,01518

Tabela 2.11 – Validação da terceira frequência natural adimensionalizada para uma nanoviga encastrada

L/h	μ	$\bar{\omega}_3$	Ref. [23]	Diferença relativa (%)
100	0	120,90339	120,9536	0,04151
	1	85,71643	85,7081	0,00972
	2	70,12229	70,1033	0,02709
	3	60,84623	60,8244	0,03589
	4	54,52396	54,5015	0,04121

2.8. Análise dos resultados

Para estudar o comportamento de uma nanoviga face à variação de diversos parâmetros, foi necessário definir a geometria e o material da nanoviga, agora tendo em conta valores que traduzem situações possivelmente reais. De referir que serão apenas consideradas nanoviga de secção transversal quadrangular, ou seja, $h = b$.

Assim sendo, são em seguida definidos os diferentes valores dos parâmetros utilizados para obter os resultados, excetuando os casos em que os resultados sejam obtidos em função da variação de um destes mesmos parâmetros:

Tabela 2.12 – Valores dos diferentes parâmetros utilizados na obtenção de resultados para uma nanoviga

L (nm)	h (nm)	E (TPa)	ν	ρ (kg/m ³)
10,00	1,00	1,00	0,25	2300,00

2.8.1. Influência das dimensões da nanoviga nas frequências naturais

Através do gráfico ilustrado na figura 2.2 é possível observar a variação da primeira frequência natural com o aumento da razão entre o comprimento da nanoviga e a sua espessura. Foram obtidos resultados para as duas condições de fronteira (simplesmente apoiada e encastrada), sendo que os valores do parâmetro não-local utilizados para cada condição de fronteira foram retirados de [22]: $\mu = 1,31 \text{ nm}^2$ para nanovigas simplesmente apoiadas e $\mu = 1,42 \text{ nm}^2$ para nanovigas encastradas.

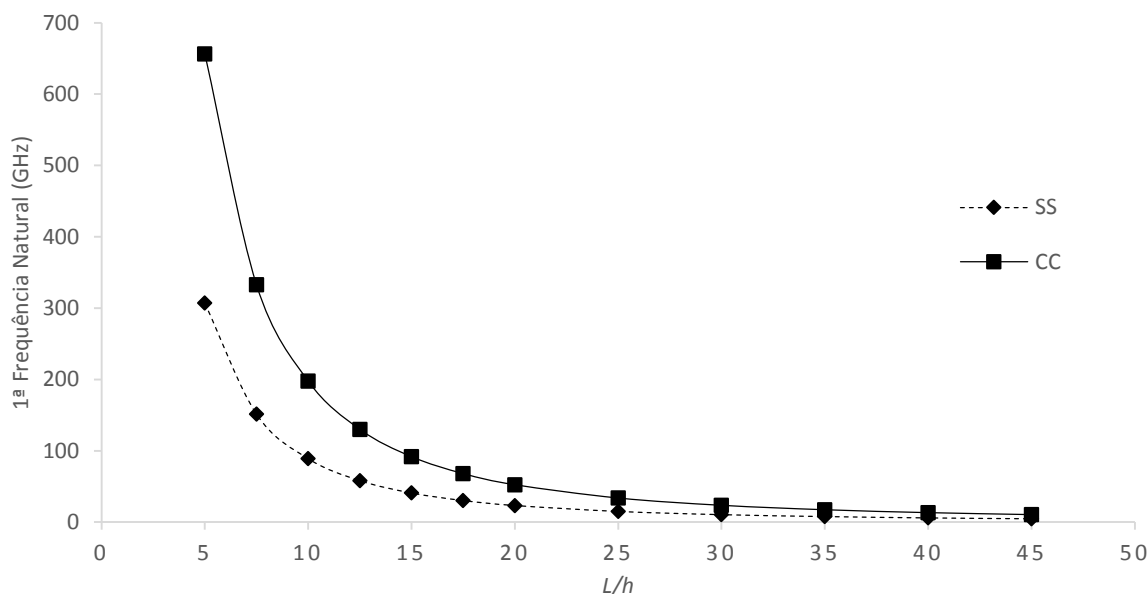


Figura 2.2 – Variação da primeira frequência natural para ambas as condições de fronteira

No entanto, uma vez que em toda a literatura analisada apenas foi encontrado um reduzido número de artigos que fizesse referência a valores característicos do parâmetro não-local para determinadas condições de fronteira, optou-se por obter a variação da primeira frequência natural para as duas condições de fronteira consideradas, tendo em conta diferentes valores do parâmetro não-local, tal como ilustra a figura 2.3.

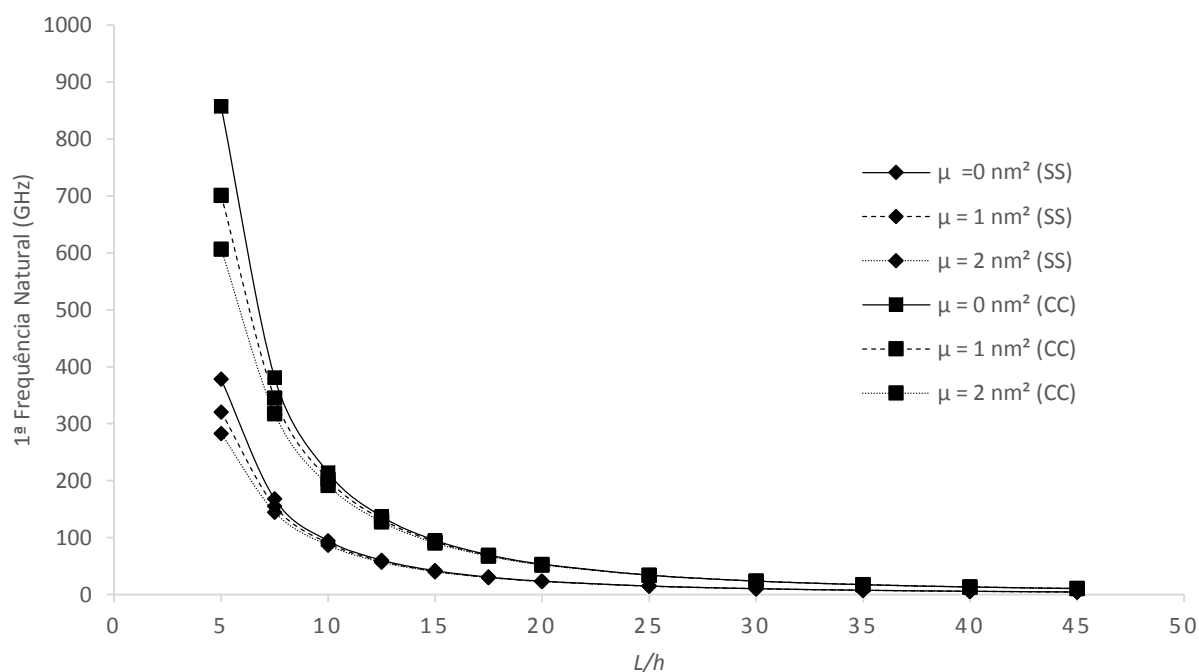


Figura 2.3 – Variação da primeira frequência natural com L/h para diferentes valores do parâmetro não-local

Assim sendo, pode-se inicialmente compreender que uma condição de encastramento gera frequências naturais mais elevadas do que uma condição de apoio simples.

No entanto, a diferença absoluta entre os valores das frequência vai diminuindo à medida que a razão entre o comprimento e a espessura da nanoviga aumenta, ou seja, em termos absolutos

e para razões L/h elevadas, as condições de fronteira a que os nanotubos são sujeitos deixam de ser relevantes, sendo as dimensões dos nanotubos parâmetros mais influentes nas suas vibrações.

2.8.2. Influência do parâmetro não-local nas frequências naturais

A variação da primeira frequência natural com o aumento do valor do parâmetro não-local encontra-se registada na figura 2.4, sendo que se recorreu a uma razão de frequências para que fosse possível comparar a variação da primeira frequência natural tendo em conta as duas condições de fronteira. A expressão que define a razão de frequências é a seguinte:

$$\text{Razão de frequências} = \frac{\omega_{\text{não-local}}}{\omega_{\text{local}}} = \frac{\omega_{\mu=i}}{\omega_{\mu=0}} \quad (2.40)$$

Para uma melhor interpretação da figura, são fornecidos em seguida os valores da primeira frequência natural para as duas condições de fronteira consideradas, presentes na tabela 2.13 e expressos em GHz, quando o parâmetro não-local assume um valor nulo. De referir que, daqui em diante, quando o parâmetro não-local assumir um valor nulo, as frequências naturais serão denominadas por “frequências naturais locais”.

Tabela 2.13 – Valores da primeira frequência natural local (GHz) referentes à figura 2.4

	$L/h = 10$	$L/h = 20$	$L/h = 30$
Simplemente apoiado	94,55082	23,63771	10,50565
Encastramento	214,33611	53,58403	23,81512

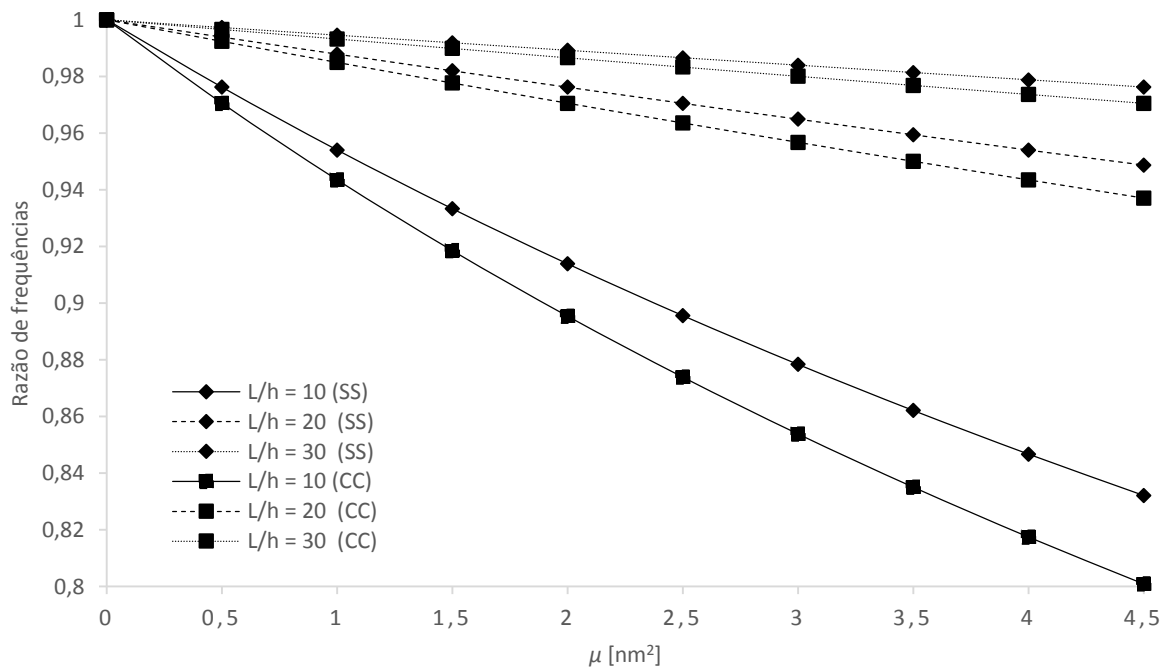


Figura 2.4 – Variação da razão de frequências com o parâmetro não-local para diferentes valores de L/h

É possível verificar que, para além de apresentar valores mais elevados da primeira frequência natural, a condição de encastramento é mais sensível ao aumento do parâmetro não-local. No

entanto, com o aumento da razão entre o comprimento e a espessura do nanotubo, a influência do parâmetro vai sendo reduzida gradualmente.

As figuras 2.5 e 2.6 traduzem a evolução dos valores das três primeiras frequências naturais, tendo em conta diferentes valores do parâmetro não-local, para ambas as condições de fronteira consideradas.

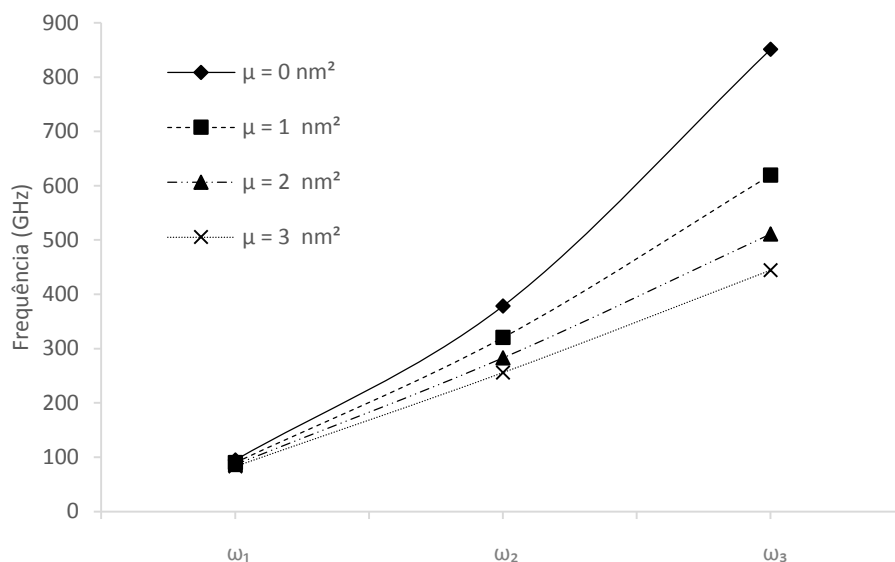


Figura 2.5 – Influência do parâmetro não-local na variação das três primeiras frequências naturais para uma nanoviga simplesmente apoiada

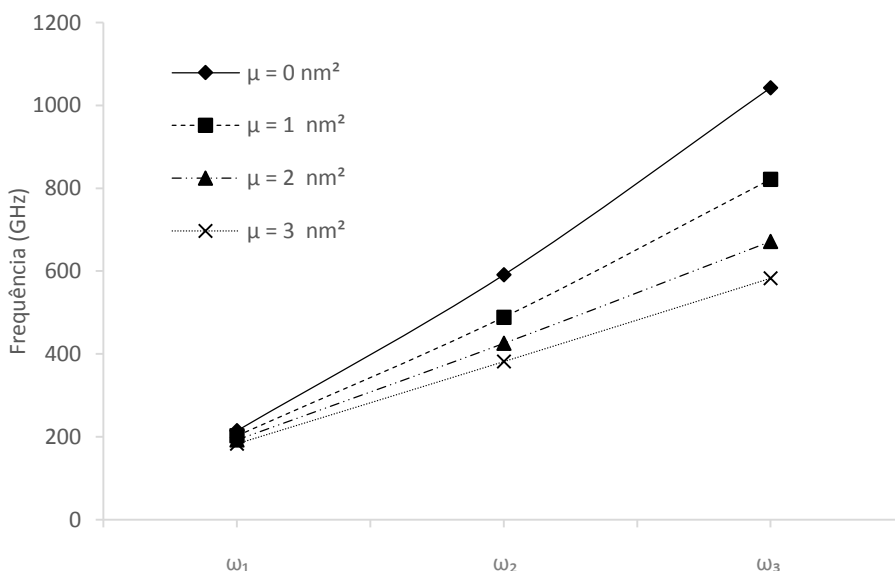


Figura 2.6 – Influência do parâmetro não-local na variação das três primeiras frequências naturais para uma nanoviga encastrada

Verifica-se, novamente, que valores mais elevados do parâmetro não-local originam frequências naturais de menor valor, assim como a condição de encastramento origina frequências naturais mais elevadas, quando comparadas com as frequências de uma nanoviga simplesmente apoiada.

É possível ainda observar que, à medida que o valor do parâmetro não-local aumenta, a evolução das frequências naturais assume um comportamento cada vez mais linear, sendo este comportamento mais evidente para uma condição de apoio simples.

2.8.3. Formas de vibração

É possível, através das tabelas 2.14 e 2.15, visualizar as três primeiras formas de vibração de uma nanoviga para as duas condições de fronteira consideradas: simplesmente apoiada e encastrada. Foram obtidos resultados para os valores do parâmetro não-local sugeridos em [22], de modo a que fosse possível estudar a sua influência no modo de vibração de uma nanoviga.

Tabela 2.14 – Formas de vibração de uma nanoviga simplesmente apoiada

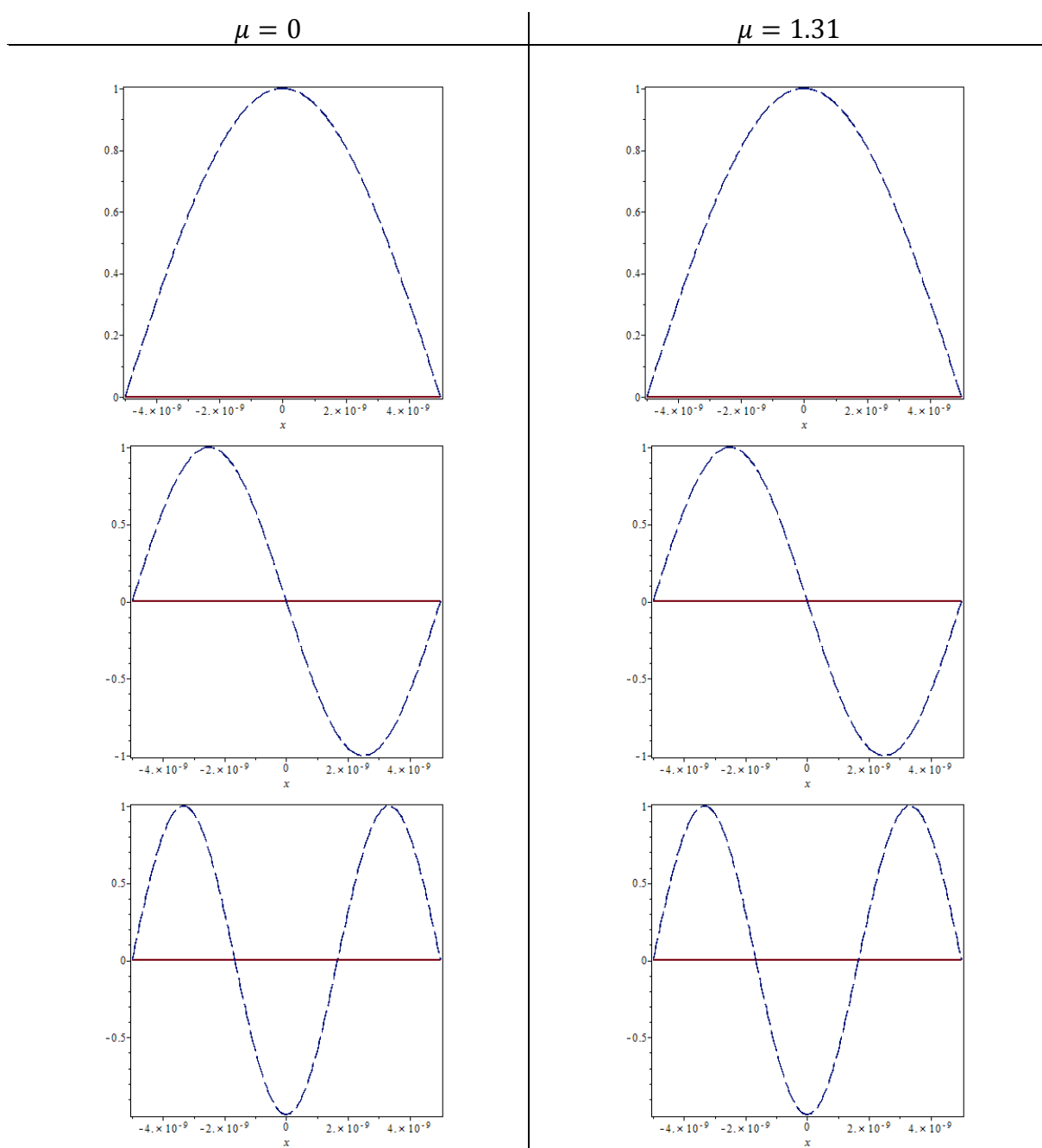
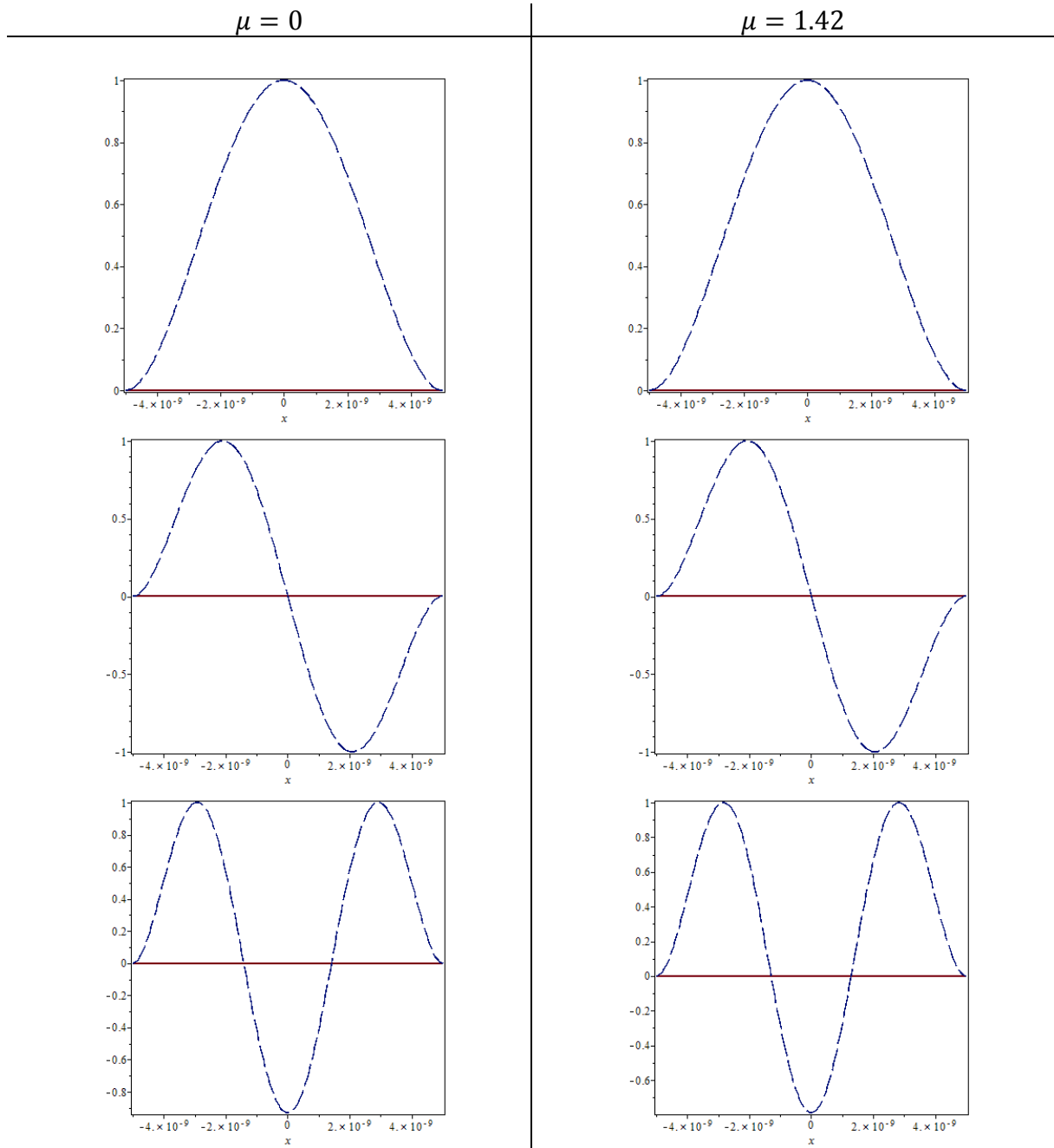


Tabela 2.15 – Formas de vibração de uma nanoviga encastrada



Deste modo, foi possível verificar que o parâmetro não-local não exerce influência nas formas de vibração de uma nanoviga, tanto para uma situação de apoio simples como de encastramento.

3. Nanoplacas simples

Após terem sido compreendidas as implicações que o parâmetro não-local teria na formulação de um modelo que permitisse analisar as frequências e modos naturais, partiu-se para a abordagem das nanoplacas, tema central da dissertação.

Recorreu-se, então, à teoria de Kirchhoff, designada também por teoria das placas finas, para formular e criar o modelo matemático que permitisse obter as frequências e modos naturais de nanoplacas. Quanto ao sistema de eixos utilizado na formulação do modelo, este encontra-se definido na figura 3.1.

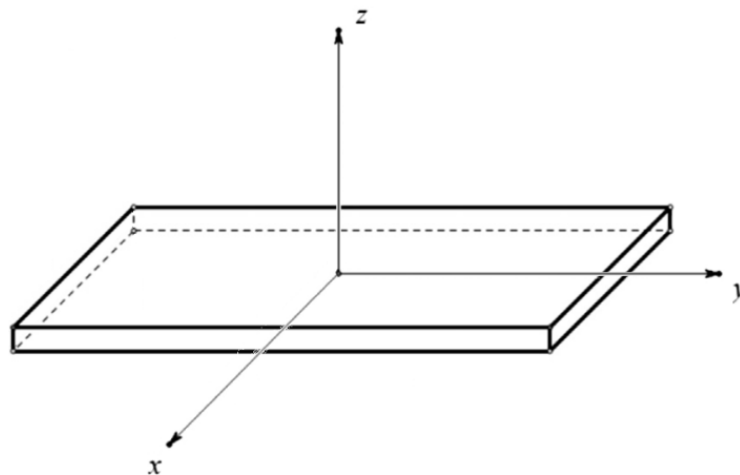


Figura 3.1 – Sistema de eixos utilizado para formular o modelo referente às nanoplacas

No que diz respeito às equações de movimento, estas serão obtidas de acordo com o princípio dos deslocamentos virtuais [77], tal como foi realizado para as nanovigas.

De referir que ao longo dos próximos três capítulos serão abordados diferentes tipos de nanoplacas: nanoplacas simples (ou seja, nanoplacas com apenas uma camada), nanoplacas

com duas camadas sujeitas a forças de van der Waals e nanoplacas magneto-electro-elásticas, não sendo englobadas num único capítulo devido a diferenças na sua formulação.

No entanto, apesar de os três tipos de nanoplacas apresentarem diferentes equações de movimento, ambas fazem uso da mesma definição de esforços presentes na teoria de Kirchhoff:

$$\begin{aligned} N_{xx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dz & N_{yy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} dz & N_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} dz \\ M_{xx} &= \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{xx} dz & M_{yy} &= \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{yy} dz & M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_{xy} dz \end{aligned} \quad (3.1)$$

3.1. Teoria de Kirchhoff

De acordo com Reddy [79], o campo de deslocamentos para a teoria de Kirchhoff é definido do seguinte modo:

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z, t) &= u(x, y, t) - z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} \\ u_y(x, y, z, t) &= v(x, y, t) - z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} \\ u_z(x, y, z, t) &= w(x, y, t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

em que u e v são os deslocamentos no plano da nanoplaca segundo x e y , respetivamente, e w é o deslocamento na direção transversal à nanoplaca. Os três deslocamentos mencionados são deslocamentos num ponto do plano médio da nanoplaca, ou seja, quando $z = 0$.

Quanto ao campo de deformações, é possível defini-lo de acordo com as seguintes expressões, não considerando novamente as componentes não lineares de von Kármán:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Assim sendo, recorreu-se novamente ao princípio de Hamilton para a obtenção das equações de movimento em função dos esforços:

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \delta U + \delta V - \delta K dt \quad (3.4)$$

sendo os diversos parâmetros definidos de acordo com as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
\delta U &= \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy} \, dz dx dy = \\
&= \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} \left(\frac{\partial \delta u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right) + \sigma_{yy} \left(\frac{\partial \delta v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) \\
&\quad + \sigma_{xy} \left(\frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right) dx dy = \\
&= \int_A \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} \delta u - \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} \delta w + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} \delta v - \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} \delta w + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \delta u \\
&\quad + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \delta v - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \delta w \, dx dy \tag{3.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \right)^2 + \rho \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} \right)^2 + \rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} \right)^2 \, dz dx dy \\
\delta K &= \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \rho \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \delta v}{\partial t} + \rho \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} - \rho z \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial t} \\
&\quad - \rho z \frac{\partial \delta u}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - \rho z \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y \partial t} - \rho z \frac{\partial \delta v}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \\
&\quad + \rho z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial t} + \rho z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y \partial t} \, dz dx dy.
\end{aligned}$$

Os termos referentes ρz^2 foram novamente desprezados, uma vez que se verificou no capítulo anterior que não exerciam uma influência significativa no resultado final, levando a que a expressão referente a δK assumia a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\delta K &= \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \rho \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \delta v}{\partial t} + \rho \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} - \rho z \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial t} \\
&\quad - \rho z \frac{\partial \delta u}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - \rho z \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y \partial t} - \rho z \frac{\partial \delta v}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \, dz dx dy. \tag{3.6}
\end{aligned}$$

Considerando a não existência de forças aplicadas em qualquer plano da nanoplaca, o trabalho virtual realizada pelas forças aplicadas, δV , assume o valor nulo.

Assim sendo, fazendo uso do princípio de Hamilton, obteve-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
0 = \int_{t_1}^{t_2} \int_A & \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} \delta u - \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} \delta w + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} \delta v - \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} \delta w + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \delta u \\
& + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \delta v - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \delta w - \rho h \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} - \rho h \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \delta v}{\partial t} \\
& - \rho h \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} dx dy dt
\end{aligned} \quad (3.7)$$

pelo que agrupando os termos em relação a cada deslocamento virtual (δu , δv e δw), são obtidas as equações de movimento em função dos esforços:

$$\begin{aligned}
\delta u : \quad & \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
\delta v : \quad & \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\
\delta w : \quad & -\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}
\end{aligned} \quad (3.8)$$

3.2. Definição dos esforços

Tendo em conta a teoria não local enunciada no capítulo 2, foi possível definir a relação constitutiva para o tensor de tensões:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} - \mu \nabla^2 \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E/(1-\nu^2) & \nu E/(1-\nu^2) & 0 \\ \nu E/(1-\nu^2) & E/(1-\nu^2) & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

Deste modo, e tendo em conta as equações (3.1) e (3.9), foi possível definir os esforços:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} - \mu \nabla^2 \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Eh/(1-\nu^2) & \nu Eh/(1-\nu^2) & 0 \\ \nu Eh/(1-\nu^2) & Eh/(1-\nu^2) & 0 \\ 0 & 0 & Gh \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} - \mu \nabla^2 \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

em que G e D são definidos pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} G &= \frac{E}{2(1-\nu)} \\ D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \end{aligned} \quad (3.12)$$

3.3. Equações de movimento

As equações de movimento em função dos deslocamentos foram definidas com recurso às equações (3.8), (3.10) e (3.11):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(Gh \frac{\partial u}{\partial y} + Gh \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &= \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho h \mu \nabla^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\nu Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(Gh \frac{\partial u}{\partial y} + Gh \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &= \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \rho h \mu \nabla^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ & D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho h \mu \nabla^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.4. Aplicação do método de Galerkin

Uma vez que a implementação do modelo numérico no *software Maple* para nanovigas foi bem-sucedida, recorreu-se novamente ao método de Galerkin. No entanto, uma vez que estamos perante um modelo matemático com mais uma variável, foi necessário recorrer a mais funções de forma, sendo que os deslocamentos foram definidos de acordos com as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_i(x) g_j(y) q_u(t) \\ v(x, y, t) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i(x) h_j(y) q_v(t) \\ w(x, y, t) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_i(x) f_j(y) q_w(t) \end{aligned} \quad (3.14)$$

em que g , h e f são funções de forma que definem a variação dos respectivos deslocamentos ao longo da nanoplaca, $q_i(t)$ são funções responsáveis por definir a variação dos deslocamentos ao longo do tempo, e n é o número total de funções de forma utilizadas para definir cada um dos deslocamentos. De referir que, apesar de ter sido considerado o mesmo número de funções de forma que caracterizam ambos os deslocamentos, este não necessita obrigatoriamente de ser igual. As funções de forma são as mesmas utilizadas no caso das nanovigas, sendo que o conjunto de funções h é idêntico ao das funções g .

De modo a permitir a resolução do problema, foi necessário definir as seguintes equações:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_u(u(x, y, t)) &= 0 \\ \mathcal{L}_v(v(x, y, t)) &= 0 \\ \mathcal{L}_w(w(x, y, t)) &= 0\end{aligned}\tag{3.15}$$

em que os diferentes operadores são definidos de acordo com as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_u(u(x, y, t)) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(Gh \frac{\partial u}{\partial y} + Gh \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &\quad - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho h \mu \nabla^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \mathcal{L}_v(v(x, y, t)) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\nu Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(Gh \frac{\partial u}{\partial y} + Gh \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &\quad - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \rho h \mu \nabla^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \mathcal{L}_w(w(x, y, t)) &= D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho h \mu \nabla^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\end{aligned}\tag{3.16}$$

Analogamente ao que foi realizado para o problema das nanovigas, foram formuladas as matrizes de massa e de rigidez da nanoplaca, de modo a ser possível obter as frequências e modos naturais. As componentes das diversas matrizes são definidas recorrendo-se às expressões abaixo definidas:

$$\begin{aligned}&\int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} g_i(x) g_j(y) \mathcal{L}_u(u(x, y, t)) \, dx dy \\ &\int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} h_i(x) h_j(y) \mathcal{L}_v(v(x, y, t)) \, dx dy \\ &\int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} f_i(x) f_j(y) \mathcal{L}_w(w(x, y, t)) \, dx dy\end{aligned}\tag{3.17}$$

no entanto, uma vez que as funções de forma utilizadas no *software Maple* encontram-se definidas segundo variáveis adimensionais (ξ , η), foram realizados os seguintes ajustamentos:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{a}{2} \xi & dx &= \frac{a}{2} d\xi & \frac{d}{dx} &= \frac{2}{a} \frac{d}{d\xi} \\
y &= \frac{b}{2} \eta & dy &= \frac{b}{2} d\eta & \frac{d}{dy} &= \frac{2}{b} \frac{d}{d\eta}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

levando a que as expressões (3.17) assumam a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \frac{a}{2} \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g_i(\xi) g_j(\eta) \mathcal{L}(u(\xi, \eta, t)) d\xi d\eta \\
& \frac{a}{2} \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 h_i(\xi) h_j(\eta) \mathcal{L}(v(\xi, \eta, t)) d\xi d\eta \\
& \frac{a}{2} \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_i(\xi) f_j(\eta) \mathcal{L}(w(\xi, \eta, t)) d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Assim sendo, foi necessário definir as expressões responsáveis pela formulação de cada matriz, isto é, entender quais os termos das expressões (3.16) e (3.19) são referentes às matrizes de massa e às matrizes de rigidez. No entanto, serão necessárias definir quatro variáveis auxiliares em função dos índices i e j para que seja possível cobrir as várias multiplicações entre funções de forma:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{i-1}{n} + 1 \\
\beta &= i - \left\lfloor \frac{i-1}{n} \right\rfloor \times n \\
\theta &= \frac{j-1}{n} + 1 \\
\zeta &= j - \left\lfloor \frac{j-1}{n} \right\rfloor \times n
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Em que a função $\lfloor x \rfloor$ representa o maior número inteiro inferior ou igual a x .

Assim sendo, serão definidas, em seguida, as componentes da matriz de rigidez referentes aos deslocamentos u , v e w :

$$\begin{aligned}
K_{uu}[i, j] &= \frac{2}{a} \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g_\alpha(\xi) g_\beta(\eta) \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 (g_\theta(\xi) g_\zeta(\eta))}{\partial \xi^2} d\xi d\eta \\
&+ \frac{a}{2} \frac{2}{b} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g_\alpha(\xi) g_\beta(\eta) Gh \frac{\partial^2 (g_\theta(\xi) g_\zeta(\eta))}{\partial \eta^2} d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
K_{vv}[i, j] &= \frac{a}{2} \frac{2}{b} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 h_{\alpha}(\xi) h_{\beta}(\eta) \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 (h_{\theta}(\xi) h_{\zeta}(\eta))}{\partial \eta^2} d\xi d\eta \\
&\quad + \frac{2}{a} \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 h_{\alpha}(\xi) h_{\beta}(\eta) Gh \frac{\partial^2 (g_{\theta}(\xi) g_{\zeta}(\eta))}{\partial \xi^2} d\xi d\eta \\
K_{uv}[i, j] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g_{\alpha}(\xi) g_{\beta}(\eta) \frac{\nu Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 (h_{\theta}(\xi) h_{\zeta}(\eta))}{\partial \xi \partial \eta} d\xi d\eta \\
&\quad + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g_{\alpha}(\xi) g_{\beta}(\eta) Gh \frac{\partial^2 (h_{\theta}(\xi) h_{\zeta}(\eta))}{\partial \xi \partial \eta} d\xi d\eta \\
K_{vu}[i, j] &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 h_{\alpha}(\xi) h_{\beta}(\eta) \frac{\nu Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 (g_{\theta}(\xi) g_{\zeta}(\eta))}{\partial \xi \partial \eta} d\xi d\eta \\
&\quad + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 h_{\alpha}(\xi) h_{\beta}(\eta) Gh \frac{\partial^2 (g_{\theta}(\xi) g_{\zeta}(\eta))}{\partial \xi \partial \eta} d\xi d\eta \\
K_{ww}[i, j] &= \frac{8}{a^3} \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_{\alpha}(\xi) f_{\beta}(\eta) D \frac{\partial^4 (f_{\theta}(\xi) f_{\zeta}(\eta))}{\partial \xi^4} d\xi d\eta \\
&\quad + \frac{2}{a} \frac{2}{b} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_{\alpha}(\xi) f_{\beta}(\eta) 2D \frac{\partial^4 (f_{\theta}(\xi) f_{\zeta}(\eta))}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} d\xi d\eta \\
&\quad + \frac{a}{2} \frac{8}{b^3} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_{\alpha}(\xi) f_{\beta}(\eta) D \frac{\partial^4 (f_{\theta}(\xi) f_{\zeta}(\eta))}{\partial \eta^4} d\xi d\eta
\end{aligned}$$

Com o intuito de reduzir o esforço de computação, uma vez que houve um acréscimo do número de funções de forma, optou-se novamente por simplificar as expressões (3.21) através do método de integração por partes:

$$\begin{aligned}
K_{uu}[i, j] &= \frac{b}{a} \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g_{\alpha}(\xi) g_{\beta}(\eta) \frac{\partial^2 (g_{\theta}(\xi) g_{\zeta}(\eta))}{\partial \xi^2} d\xi d\eta \\
&\quad + \frac{a}{b} Gh \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g_{\alpha}(\xi) g_{\beta}(\eta) \frac{\partial^2 (g_{\theta}(\xi) g_{\zeta}(\eta))}{\partial \eta^2} d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{3.22}$$

em que a resolução do primeiro integral passa pelos seguintes passos:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g_{\alpha}(\xi) g_{\beta}(\eta) \frac{\partial^2 (g_{\theta}(\xi) g_{\zeta}(\eta))}{\partial \xi^2} d\xi d\eta = \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^1 g_\alpha(\xi) \frac{\partial^2 g_\theta(\xi)}{\partial \xi^2} d\xi \times \int_{-1}^1 g_\beta(\eta) g_\zeta(\eta) d\eta \\
\int_{-1}^1 g_\alpha(\xi) \frac{\partial^2 g_\theta(\xi)}{\partial \xi^2} d\xi &= g_\alpha(\xi) \frac{\partial g_\theta(\xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=-1}^{\xi=1} - \int_{-1}^1 \frac{\partial g_\alpha(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial g_\theta(\xi)}{\partial \xi} d\xi \\
g_\alpha(1) &= 0 \quad \vee \quad \frac{\partial g_\theta(\xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} = 0 \\
g_\alpha(-1) &= 0 \quad \vee \quad \frac{\partial g_\theta(\xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=-1} = 0 \\
\int_{-1}^1 g_\alpha(\xi) \frac{\partial^2 g_\theta(\xi)}{\partial \xi^2} d\xi &= - \int_{-1}^1 \frac{\partial g_\alpha(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial g_\theta(\xi)}{\partial \xi} d\xi \\
\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g_\alpha(\xi) g_\beta(\eta) \frac{\partial^2 (g_\theta(\xi) g_\zeta(\eta))}{\partial \xi^2} d\xi d\eta &= \\
&= - \int_{-1}^1 \frac{\partial g_\alpha(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial g_\theta(\xi)}{\partial \xi} d\xi \times \int_{-1}^1 g_\beta(\eta) g_\zeta(\eta) d\eta
\end{aligned}$$

As relações definidas em (3.23) são válidas para várias condições de fronteira, entre as quais se inclui o apoio simples e o encastramento, que irão ser as condições de fronteira utilizadas no cálculo das frequências e modos naturais.

O segundo integral da componente da matriz de rigidez \mathbf{K}_{uu} é simplificado recorrendo às mesmas manipulações matemáticas acima utilizadas. Assim sendo, \mathbf{K}_{uu} apresenta a seguinte forma simplificada:

$$\begin{aligned}
K_{uu}[i, j] &= -\frac{b}{a} \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_{-1}^1 \frac{\partial g_\alpha(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial g_\theta(\xi)}{\partial \xi} d\xi \times \int_{-1}^1 g_\beta(\eta) g_\theta(\eta) d\eta \\
&\quad - \frac{a}{b} Gh \int_{-1}^1 g_\alpha(\xi) g_\theta(\xi) d\xi \times \int_{-1}^1 \frac{\partial g_\beta(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial g_\zeta(\eta)}{\partial \eta} d\eta
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Analogamente, foram obtidas as restantes expressões para as restantes componentes da matriz de rigidez, sendo que os passos intermédios referentes à integração por partes encontram-se definidos no Anexo B.

$$\begin{aligned}
K_{vv}[i, j] &= -\frac{a}{b} \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_{-1}^1 g_\alpha(\xi) g_\theta(\xi) d\xi \times \int_{-1}^1 \frac{\partial g_\beta(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial g_\zeta(\eta)}{\partial \eta} d\eta \\
&\quad - \frac{a}{b} Gh \int_{-1}^1 \frac{\partial h_\alpha(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial h_\theta(\xi)}{\partial \xi} d\xi \times \int_{-1}^1 g_\beta(\eta) g_\zeta(\eta) d\eta
\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
K_{uv}[i, j] &= \frac{\nu E h}{1 - \nu^2} \int_{-1}^1 g_\alpha(\xi) \frac{\partial h_\theta(\xi)}{\partial \xi} d\xi \times \int_{-1}^1 g_\beta(\eta) \frac{\partial h_z(\eta)}{\partial \eta} d\eta \\
&\quad + G h \int_{-1}^1 g_\alpha(\xi) \frac{\partial h_\theta(\xi)}{\partial \xi} d\xi \times \int_{-1}^1 g_\beta(\eta) \frac{\partial h_z(\eta)}{\partial \eta} d\eta \\
K_{vu}[i, j] &= \frac{\nu E h}{1 - \nu^2} \int_{-1}^1 h_\alpha(\xi) \frac{\partial g_\theta(\xi)}{\partial \xi} d\xi \times \int_{-1}^1 h_\beta(\eta) \frac{\partial g_z(\eta)}{\partial \eta} d\eta \\
&\quad + G h \int_{-1}^1 h_\alpha(\xi) \frac{\partial g_\theta(\xi)}{\partial \xi} d\xi \times \int_{-1}^1 h_\beta(\eta) \frac{\partial g_z(\eta)}{\partial \eta} d\eta \\
K_{ww}[i, j] &= \frac{4b}{a^3} D \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 f_\alpha(\xi)}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 f_\theta(\xi)}{\partial \xi^2} d\xi \times \int_{-1}^1 f_\beta(\eta) f_z(\eta) d\eta \\
&\quad + \frac{4}{ab} 2D \int_{-1}^1 \frac{\partial f_\alpha(\eta\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial f_\theta(\xi)}{\partial \xi} d\xi \times \int_{-1}^1 \frac{\partial f_\beta(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial f_z(\eta)}{\partial \eta} d\eta \\
&\quad + \frac{4a}{b^3} D \int_{-1}^1 f_\alpha(\xi) f_\theta(\xi) d\xi \times \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 f_\beta(\eta)}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 f_z(\eta)}{\partial \eta^2} d\eta
\end{aligned}$$

Quanto às expressões que definem as componentes da matriz de massa referentes aos diferentes deslocamentos, estas são definidas de acordo com as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
M_{uu}[i, j] &= -\frac{a}{2} \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g_\alpha(\xi) g_\beta(\eta) \rho h g_\theta(\xi) g_z(\eta) d\xi d\eta \\
&\quad + \frac{2}{a} \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g_\alpha(\xi) g_\beta(\eta) \mu \rho h \frac{\partial^2 (g_\theta(\xi) g_z(\eta))}{\partial \xi^2} d\xi d\eta \\
&\quad + \frac{a}{2} \frac{2}{b} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g_\alpha(\xi) g_\beta(\eta) \mu \rho h \frac{\partial^2 (g_\theta(\xi) g_z(\eta))}{\partial \eta^2} d\xi d\eta \\
M_{vv}[i, j] &= -\frac{a}{2} \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 h_\alpha(\xi) h_\beta(\eta) \rho h h_\theta(\xi) h_z(\eta) d\xi d\eta \\
&\quad + \frac{2}{a} \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 h_\alpha(\xi) h_\beta(\eta) \mu \rho h \frac{\partial^2 (h_\theta(\xi) h_z(\eta))}{\partial \xi^2} d\xi d\eta \\
&\quad + \frac{a}{2} \frac{2}{b} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 h_\alpha(\xi) h_\beta(\eta) \mu \rho h \frac{\partial^2 (h_\theta(\xi) h_z(\eta))}{\partial \eta^2} d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}
M_{ww}[i,j] = & -\frac{a}{2} \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_{\alpha}(\xi) f_{\beta}(\eta) \rho h f_{\theta}(\xi) f_{\zeta}(\eta) d\xi d\eta \\
& + \frac{2}{a} \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_{\alpha}(\xi) f_{\beta}(\eta) \mu \rho h \frac{\partial^2 (f_{\theta}(\xi) f_{\zeta}(\eta))}{\partial \xi^2} d\xi d\eta \\
& + \frac{a}{2} \frac{2}{b} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_{\alpha}(\xi) f_{\beta}(\eta) \mu \rho h \frac{\partial^2 (f_{\theta}(\xi) f_{\zeta}(\eta))}{\partial \eta^2} d\xi d\eta
\end{aligned}$$

Analogamente ao que foi realizado para as componentes da matriz de rigidez, as expressões foram novamente simplificadas com recurso ao método de integração por partes assumindo a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
M_{uu}[i,j] = & -\frac{ab}{4} \rho h \int_{-1}^1 g_{\alpha}(\xi) g_{\theta}(\xi) d\xi \times \int_{-1}^1 g_{\beta}(\eta) g_{\zeta}(\eta) d\eta \\
& - \frac{b}{a} \mu \rho h \int_{-1}^1 \frac{\partial g_{\alpha}(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial g_{\theta}(\xi)}{\partial \xi} d\xi \times \int_{-1}^1 g_{\beta}(\eta) g_{\zeta}(\eta) d\eta \\
& - \frac{a}{b} \mu \rho h \int_{-1}^1 g_{\alpha}(\xi) g_{\theta}(\xi) d\xi \times \int_{-1}^1 \frac{\partial g_{\beta}(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial g_{\zeta}(\eta)}{\partial \eta} d\eta \\
M_{vv}[i,j] = & -\frac{ab}{4} \rho h \int_{-1}^1 h_{\alpha}(\xi) h_{\theta}(\xi) d\xi \times \int_{-1}^1 h_{\beta}(\eta) h_{\zeta}(\eta) d\eta \\
& - \frac{b}{a} \mu \rho h \int_{-1}^1 \frac{\partial h_{\alpha}(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial h_{\theta}(\xi)}{\partial \xi} d\xi \times \int_{-1}^1 h_{\beta}(\eta) h_{\zeta}(\eta) d\eta \quad (3.27) \\
& - \frac{a}{b} \mu \rho h \int_{-1}^1 h_{\alpha}(\xi) h_{\theta}(\xi) d\xi \times \int_{-1}^1 \frac{\partial h_{\beta}(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial h_{\zeta}(\eta)}{\partial \eta} d\eta \\
M_{ww}[i,j] = & -\frac{ab}{4} \rho h \int_{-1}^1 f_{\alpha}(\xi) f_{\theta}(\xi) d\xi \times \int_{-1}^1 f_{\beta}(\eta) f_{\zeta}(\eta) d\eta \\
& - \frac{b}{a} \mu \rho h \int_{-1}^1 \frac{\partial f_{\alpha}(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial f_{\theta}(\xi)}{\partial \xi} d\xi \times \int_{-1}^1 f_{\beta}(\eta) f_{\zeta}(\eta) d\eta \\
& - \frac{a}{b} \mu \rho h \int_{-1}^1 f_{\alpha}(\xi) f_{\theta}(\xi) d\xi \times \int_{-1}^1 \frac{\partial f_{\beta}(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial f_{\zeta}(\eta)}{\partial \eta} d\eta
\end{aligned}$$

Encontram-se assim definidas as expressões necessárias para a criação das matrizes de rigidez e de massa e, consequentemente, obter resultados para as frequências e modos naturais de vibrações de nanoplacas simples. Deste modo, foi possível definir a forma matricial das equações de movimento:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{vv} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{ww} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_u(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}_v(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}_w(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{uv} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{vu} & \mathbf{K}_{vv} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{ww} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_u(t) \\ \mathbf{q}_v(t) \\ \mathbf{q}_w(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

3.5. Estudo de convergência

Tendo sido criado um novo modelo numérico, foi necessário determinar o número de funções de forma a partir do qual os resultados estabilizam, isto é, quando a diferença entre resultados obtidos para dois número consecutivos de funções de forma deixa de ser relevante.

Deste modo, foram obtidos resultados para a primeira, segunda e quarta frequência natural, tendo sido utilizadas desde 4 até 11 funções de forma. Os resultados referentes à terceira frequência natural foram desprezados devido ao facto de serem idênticos aos da segunda frequência natural, uma vez que correspondem a ondas sinusoidais simétricas (a segunda frequência natural corresponde a $m = 1$ e $n = 2$, enquanto que a terceira frequência natural corresponde a $m = 2$ e $n = 1$).

A formulação das frequências naturais recorrendo a ondas sinusoidais está de acordo com Leissa [82], que afirma que a deformação vertical de uma placa pode ser obtida a partir do produto de duas funções:

$$W(x, y) = X(x)Y(y) \quad (3.29)$$

sendo que as funções $X(x)$ e $Y(y)$ são definidas de acordo com as condições de fronteira da placa. Deste modo, para uma placa simplesmente apoiada, as funções são definidas de acordo com as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} X(x) &= \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \\ Y(y) &= \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (3.30)$$

em que os coeficientes m e n correspondem ao número de linhas nodais situadas segundo x e y , respetivamente. Assim sendo, são apresentados em seguida na tabela 3.1 os valores utilizados para definir os parâmetros relativos à geometria e material da nanoplaca. De referir que é considerado uma nanoplaca quadrangular, ou seja, $a = b$.

Tabela 3.1 – Valores dos diferentes parâmetros utilizados no estudo de convergência [54]

a (nm)	h (nm)	E (TPa)	ν	ρ (kg/m ³)
10,00	0,34	1,06	0,25	2250,00

As condições de fronteira foram definidas como sendo simplesmente apoiadas em todos os lados da nanoplaca. Considerou-se que os valores obtidos para as frequências naturais ao utilizar 11 funções de forma seriam os valores de referência, pelo que foi registada a diferença (em valor absoluto) entre esse valor e os restantes valores obtidos para um número inferior de funções de forma, tal como se pode observar nas tabelas 3.2 - 3.4. Uma vez que os valores da frequência se encontram em Hz, a relevância das diferenças por ser por vezes de difícil

compreensão, tendo, por isso, se optado por também obter a diferença relativa entre os valores, de modo a facilitar a compreensão da tabela. De referir que o número elevado de algarismos significativos foi apenas utilizado de modo a permitir a perceção das diferenças existentes entre os vários valores obtidos.

Tabela 3.2 – Estudo da convergência da primeira frequência natural (Hz) de uma nanoplaca simples

n	ω_1^i	$ \omega_1^i - \omega_1^{i=11} $	Diferença relativa (%)
4	69.133.033.736,5989	11.366.977,83481	0,01644
5	69.121.671.722,9873	4.964,22321	0,00001
6	69.121.671.722,9872	4.964,22310	0,00001
7	69.121.666.759,3805	0,61639	0,00000
8	69.121.666.759,3804	0,61630	0,00000
9	69.121.666.758,7641	0,00000	0,00000
10	69.121.666.758,7641	0,00000	0,00000
11	69.121.666.758,7641	0,00000	0,00000

Tabela 3.3 – Estudo da convergência da segunda frequência natural (Hz) de uma nanoplaca simples

n	ω_2^i	$ \omega_2^i - \omega_2^{i=11} $	Diferença relativa (%)
4	173.307.086.962,421	502.920.058,98300	0,29103
5	173.304.253.821,682	500.086.918,24402	0,28940
6	172.806.266.633,246	2.099.729,80801	0,00122
7	172.806.265.492,951	2.098.589,51300	0,00121
8	172.804.169.668,958	2.765,52002	0,00000
9	172.804.169.668,824	2.765,38602	0,00000
10	172.804.166.903,439	0,00101	0,00000
11	172.804.166.903,438	0,00000	0,00000

Tabela 3.4 – Estudo da convergência da terceira frequência natural (Hz) de uma nanoplaca simples

n	ω_4^i	$ \omega_4^i - \omega_4^{i=11} $	Diferença relativa (%)
4	277.221.830.241,632	73.5163.268,73401	0,26589
5	277.221.830.241,635	73.5163.268,73700	0,26589
6	276.489.579.845,494	2.912.872,59601	0,00105
7	276.489.579.845,494	2.912.872,59601	0,00105
8	276.486.670.682,701	3.709,80298	0,00000
9	276.486.670.682,700	3.709,80200	0,00000
10	276.486.666.972,899	0,00098	0,00000
11	276.486.666.972,898	0,00000	0,00000

Verifica-se que a partir do uso de 8 funções de forma em cada direção a diferença passa a ser inexistente, sendo que, mesmo utilizando apenas quatro funções de forma, as primeiras frequências naturais são calculadas com um pequeno erro. No entanto, por motivos de maior precisão, serão usadas 11 funções de forma, uma vez que a variação no esforço computacional é insignificante.

3.6. Validação do modelo

De modo a averiguar se os resultados obtidos pelo modelo criado seriam coerentes, recorreu-se à comparação com os valores existentes na literatura.

Assim sendo, recorreu-se aos seguintes artigos para comparar os resultados obtidos:

- [36], uma vez que permite a comparação de valores adimensionalizados das primeiras três frequências naturais, tanto para a teoria das placas finas, como para teorias de ordem mais elevada (teoria de deformação de corte de primeira e de terceira ordem);
- [55], dado que também fornece valores adimensionalizados, mas tendo em conta teorias de variável dupla;
- [44], visto que permite a comparação dos resultados referentes à primeira frequência natural com valores obtidos através de simulações de dinâmicas moleculares;
- [54], uma vez que permite a comparação com valores para as duas condições de fronteira utilizadas (apoio simples e encastramento), assim como das quatro primeiras frequências naturais.

Ao contrário do que foi realizado no capítulo referente às nanovigas, foi necessário considerar diferentes valores dos parâmetros característicos para cada comparação, uma vez que apenas os artigos [36, 55] utilizam valores adimensionalizados.

A adimensionalização do valor da primeira frequência natural foi realizada através da seguinte expressão:

$$\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\frac{\rho}{G}} \quad (3.31)$$

Assim sendo, os valores que definem os parâmetros adimensionais característicos da nanoplaca utilizados para a comparação dos valores adimensionalizados da primeira frequência natural encontram-se registados na tabela 3.5.

Tabela 3.5 – Valores dos diferentes parâmetros utilizados na validação através de [36, 55]

a	E	ν
10,00	30×10^6	0,3

A tabela 3.6 estabelece a comparação entre os valores obtidos para a primeira frequência natural adimensionalizada e os valores fornecidos pelos artigos [36, 55]. Quanto à tabela 3.7, esta realiza a comparação entre os valores obtidos para a segunda e terceira frequência natural e os valores fornecidos pelo artigo [36]. As condições de fronteira foram definidas como sendo simplesmente apoiadas em todos os lados da nanoplaca. De referir que as diferenças relativas referentes aos dois artigos foram expressas em percentagem.

Após análise das tabelas é possível afirmar que, uma vez que os erros em relação aos valores do artigo de Aghalabaei e Reddy [36] assumem valores abaixo do 1%, o modelo se encontra apto para o cálculo das várias frequências naturais adimensionalizadas de uma nanoplaca. A existência de erros de valor mais elevado relativamente aos valores do artigo de Sobhy [55] são de fácil compreensão, visto que o autor utiliza uma teoria de ordem mais elevada, ao contrário da teoria de Kirchhoff utilizada para a formulação do modelo e por Aghalabaei e Reddy [36].

O facto de a teoria Kirchhoff desprezar a componente de corte é a razão pela qual o valor das frequências naturais são sobrevalorizadas face a teorias de ordem mais elevada.

Tabela 3.6 – Validação dos valores obtidos para a primeira frequência natural adimensionalizada

a/h	μ	$\overline{\omega}_{11}$	Ref. [36]	Sobhy [55]	Diferença Ref. [36] (%)	Diferença Sobhy (%)
10	0	0,09632	0,0963	0,09302	0,01815	3,54491
	1	0,08802	0,0880	0,08501	0,02400	3,54208
	2	0,08156	0,0816	0,07877	0,05492	3,53585
	3	0,07633	0,0763	0,07372	0,04260	3,54382
	4	0,07200	0,0720	0,06954	0,00036	3,53716
	5	0,06833	0,0683	0,06599	0,04371	3,54577
20	0	0,02408	0,0241	0,02386	0,08561	0,91940
	1	0,02201	0,0220	0,02180	0,02400	0,94165
	2	0,02039	0,0204	0,02020	0,05492	0,93464
	3	0,01908	0,0191	0,01891	0,08834	0,91553
	4	0,01800	0,0180	0,01783	0,00036	0,95309
	5	0,01708	0,0171	0,01692	0,10255	0,96018

Tabela 3.7 – Validação dos valores obtidos para a segunda e terceira frequência natural adimensionalizada

ω	μ	Modelo formulado	Reddy [36]	Diferença relativa (%)
$\overline{\omega}_{22}$	0	0,38527	0,3853	0,00781
	1	0,28800	0,288	0,00036
	2	0,23990	0,2399	0,00054
	3	0,20991	0,2099	0,00487
	4	0,18893	0,1889	0,01764
	5	0,17320	0,1732	0,00214
$\overline{\omega}_{33}$	0	0,86686	0,8669	0,00493
	1	0,52023	0,5202	0,00602
	2	0,40625	0,4063	0,01169
	3	0,34456	0,3446	0,01274
	4	0,30447	0,3045	0,01061
	5	0,27575	0,2757	0,01710

Para que fosse possível realizar a comparação com os valores que constam do artigo de Ansari *et al.* [44], foi necessário voltar a definir os valores dos parâmetros característicos da nanoplaca, encontrando-se estes registados na tabela 3.8.

Tabela 3.8 – Valores dos diferentes parâmetros utilizados na validação através de [44]

h (nm)	E (TPa)	ν	ρ
0,34	1,00	0,16	2250,00

Na tabela 3.9 é possível encontrar os valores obtidos através do modelo formulado para a primeira frequência natural, assim como os valores fornecidos pelo artigo, tanto para o modelo contínuo como para as simulações de dinâmica molecular. Foram considerados dois valores para o parâmetro não-local, assim como diferentes comprimentos da nanoplaca, sendo que a

nanoplaça teria uma forma quadrada ($a = b$). Quanto às condições de fronteira, estas foram definidas como sendo simplesmente apoiadas em todos os lados da nanoplaça. De referir que os valores das frequências naturais encontram-se expressos em THz. De referir ainda que os valores tabelados nas colunas “MD” e “Erro MD” dizem respeito aos valores relacionados com as simulações de dinâmica molecular (em inglês *Molecular Dynamics*), sendo que ambos os erros se encontram expressos em percentagem.

É possível verificar que os valores obtidos pelo modelo formulado são coerentes, sendo que os erros relativamente ao modelo contínuo utilizado por Ansari *et al.* [44] estão relacionados com o facto de os autores terem recorrido a uma teoria de corte de primeira ordem para formular o seu modelo. A realização desta comparação revelou-se bastante satisfatória, uma vez que permitiu comparar os valores obtidos pelo modelo formulado com valores obtidos através de simulações de dinâmica molecular, sendo que o modelo formulado aparenta fornecer melhores resultados do que o modelo apresentado por Ansari *et al.* [44].

Tabela 3.9 – Validação das frequências naturais (THz) obtidas através da comparação com valores resultantes de simulações de dinâmica molecular

μ (nm ²)	a (nm)	ω	Ref. [44]	MD [44]	Diferença Ref. [44] (%)	Diferença MD (%)
1,41	10	0,05824	0,05842	0,05877	0,30329	0,89768
	15	0,02761	0,02829	0,02739	2,39856	0,81121
	20	0,01592	0,01646	0,01575	3,28360	1,05662
	25	0,01031	0,01071	0,00998	3,72605	3,26018
	30	0,00721	0,00750	0,00707	3,97654	1,99512
1,31	10	0,05856	0,05924	0,05950	1,13719	1,57833
	15	0,02769	0,02849	0,02779	2,83728	0,38416
	20	0,01594	0,01653	0,01581	3,54662	0,82529
	25	0,01032	0,01074	0,01000	3,90040	3,23005
	30	0,00721	0,00752	0,00707	4,09919	1,98887

As últimas validações foram realizadas com recurso a comparações com o artigo de Sarrami-Foroushani e Azhari [54]. Deste modo, foi necessário redefinir os valores dos parâmetros característicos das nanoplaca, encontrando-se os mesmos registados na tabela 3.10.

Tabela 3.10 – Valores dos diferentes parâmetros utilizadas na validação através de [54]

a (nm)	h (nm)	E (TPa)	ν	ρ (kg/m ³)
10,00	0,34	1,06	0,25	2250,00

Na tabela 3.11 encontram-se os valores relativos à primeira frequência natural de uma nanoplaça simplesmente apoiada face à variação do parâmetro não-local, assim como o erro relativo entre os valores obtidos através do modelo formulado no *software Maple* e os valores fornecidos na referência [54].

Por outro lado, na tabela 3.12 encontram-se os valores relativos às quatro primeiras frequências naturais para as duas condições de fronteira consideradas (apoio simples e encastramento). Esta comparação foi realizada para um parâmetro não-local de valor nulo.

Tabela 3.11 – Validação dos valores obtidos para a primeira frequência natural (THz) tendo em conta diferentes valores do parâmetro não-local

μ (nm ²)	Modelo formulado	Ref. [54]
0	0,06912	0,06912
0,25	0,06748	0,06748
1	0,06317	0,06317
2,25	0,05752	0,05752
4	0,05167	0,05167

Tabela 3.12 – Validação dos valores obtidos para as frequências naturais (THz) para diferentes condições de fronteira

Cond. Fronteira	ω	Modelo formulado	Ref. [54]	Diferença relativa (%)
SSSS	ω_1	0,06912	0,06912	0,00241
	ω_2	0,17280	0,17280	0,00241
	ω_3	0,17280	0,17282	0,00916
	ω_4	0,27649	0,27649	0,00120
CCCC	ω_1	0,12601	0,12603	0,01511
	ω_2	0,25701	0,25709	0,03244
	ω_3	0,25701	0,25713	0,04799
	ω_4	0,37895	0,37920	0,06664

3.7. Análise dos resultados

O estudo do comportamento de uma nanoplaca simples face à variação de diversos parâmetros obrigou à definição da geometria e do material da nanoplaca, tendo em conta valores que permitissem traduzir situações possivelmente reais.

Assim sendo, o valor dos diferentes parâmetros utilizados para a obtenção dos resultados são idênticos aos registados na tabela 3.10, excetuando os casos em que os resultados sejam obtidos em função da variação de um destes mesmos parâmetros.

3.7.1. Influência das dimensões da nanoplaca nas frequências naturais

Através do gráfico da figura 3.2 é possível observar a variação da primeira frequência natural com o aumento do comprimento da nanoplaca (sendo que a largura é sempre igual ao comprimento). Foram obtidos resultados para ambas as condições de fronteira (apoio simples e encastramento), sendo que os valores do parâmetro não-local utilizados para cada condição de fronteira foram retirados do artigo [44]: $\mu = 1.41$ nm² para nanoplacas simplesmente apoiadas e $\mu = 0.87$ nm² para nanoplacas encastradas.

Seguindo o mesmo critério utilizado para as nanovigas, uma vez que em toda a literatura apenas foi encontrado um número reduzido de artigos que fizesse referência a valores característicos do parâmetro não-local para determinadas condições de fronteira, optou-se por obter a variação da primeira frequência natural para ambas as condições de fronteira consideradas, tendo em conta diferentes valores do parâmetro não-local, tal como ilustra a figura 3.3.

Assim sendo, foi possível observar que o comportamento de uma nanoplaca simples é semelhante ao de uma nanoviga face a diferentes condições de fronteira, uma vez que a condição de encastramento gera frequências naturais mais elevadas do que uma condição de apoio simples. No entanto, a diferença absoluta entre os valores das frequências vai diminuindo à medida que as dimensões da nanoplaca aumentam, ou seja, em termos absolutos e para comprimentos elevados, as condições de fronteira a que as nanoplacas são sujeitas deixam de assumir um papel relevante, sendo as dimensões das nanoplacas mais influentes nas suas vibrações.

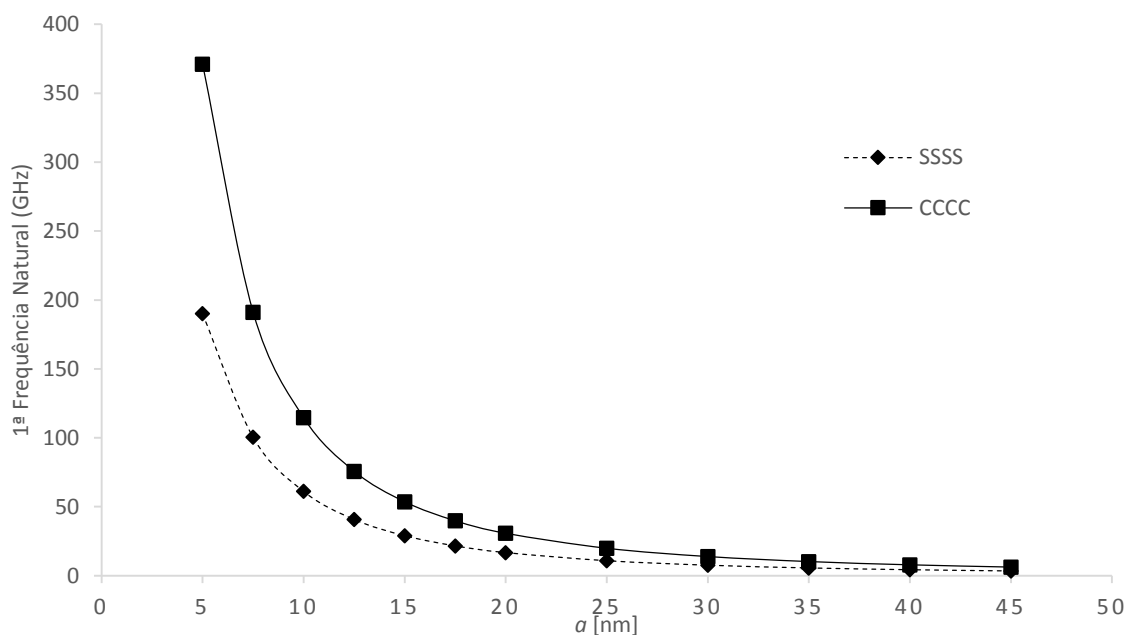


Figura 3.2 – Variação da primeira frequência natural com o comprimento da nanoplaca para ambas as condições de fronteira

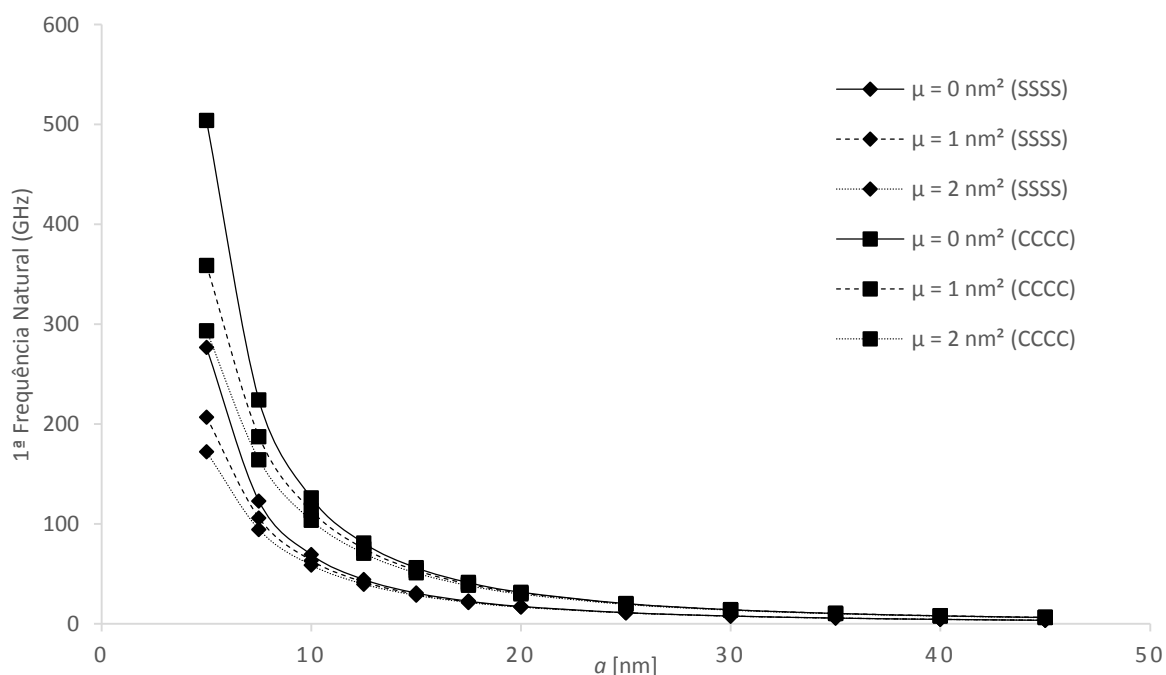


Figura 3.3 – Variação da primeira frequência natural com o comprimento da nanoplaca para diferentes valores do parâmetro não-local

3.7.2. Influência do parâmetro não-local nas frequências naturais

A figura 3.4 ilustra a variação da primeira frequência natural face ao aumento do parâmetro não-local, tendo sido utilizada, novamente, uma razão entre frequências para realizar a comparação entre as frequências para as duas condições de fronteira consideradas.

De modo a permitir uma melhor interpretação da figura, encontram-se registados na tabela 3.13 os valores das frequências naturais quando o parâmetro não-local assume um valor nulo. De referir que as frequências encontram-se expressas em GHz.

Tabela 3.13 – Valores da primeira frequência natural local (GHz) referentes à figura 3.4

	$a = 10 \text{ nm}$	$a = 20 \text{ nm}$	$a = 30 \text{ nm}$
Simplesmente apoiado	69,12167	17,28042	7,68019
Encastramento	126,01095	31,50274	14,00122

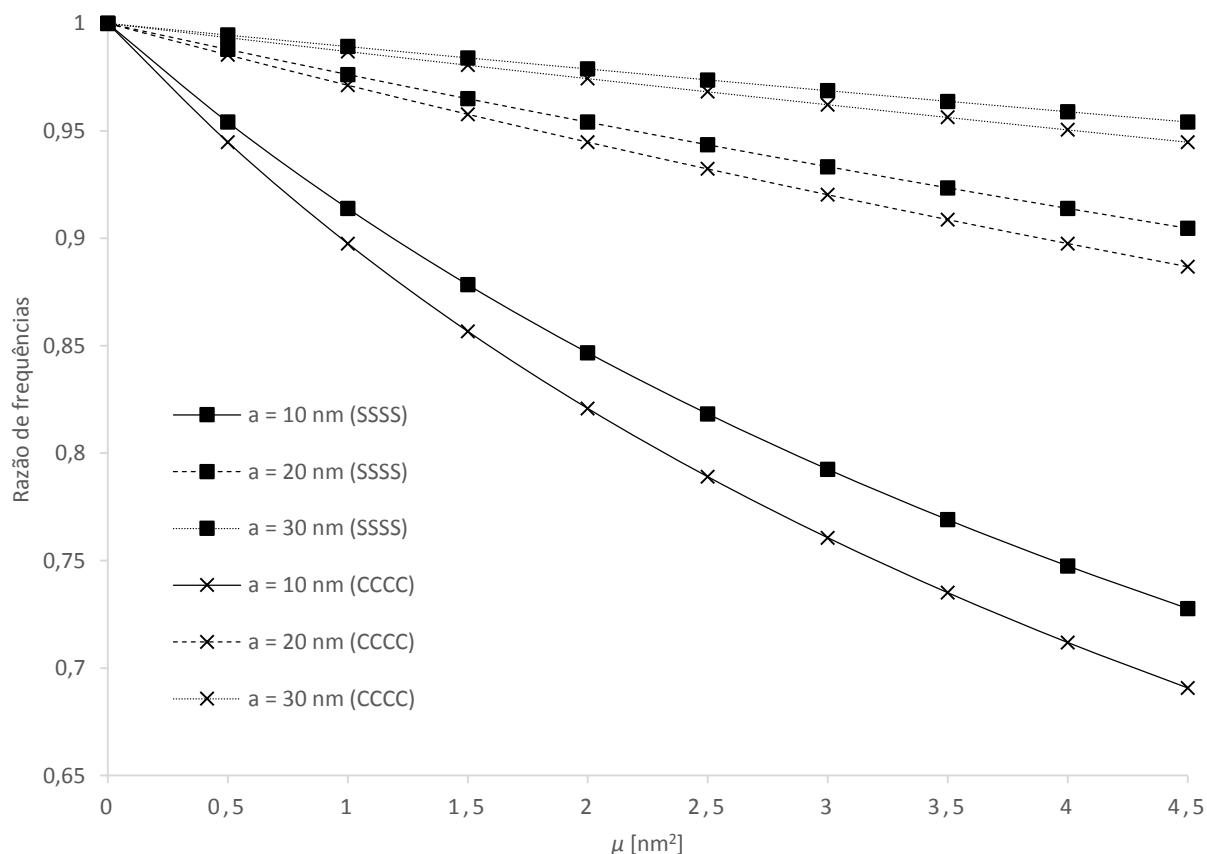


Figura 3.4 – Variação da razão de frequências para diferentes valores do comprimento

Através da análise da figura é possível verificar que a condição de encastramento é mais sensível ao aumento do parâmetro não-local, uma vez que apresenta uma maior variação da razão de frequências. No entanto, tal como havia sido observado na análise à figura 3.3, o aumento do comprimento da nanoplaca provoca uma diminuição da influência do parâmetro não-local na variação da primeira frequência natural.

A comparação da influência do parâmetro não-local nas quatro primeiras frequências naturais encontra-se ilustrada na figura 3.5, tendo em conta ambas as condições de fronteira.

Por outro lado, encontram-se registados na tabela 3.14, os valores das frequências naturais quando o parâmetro não-local assume um valor nulo, estando as mesmas expressas em GHz.

Tabela 3.14 – Valores das várias frequências naturais locais (GHz) referentes à figura 3.5

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
Simplesmente apoiado	69,12167	172,80417	172,80417	276,48667
Encastramento	126,01095	257,00651	257,00651	378,94666

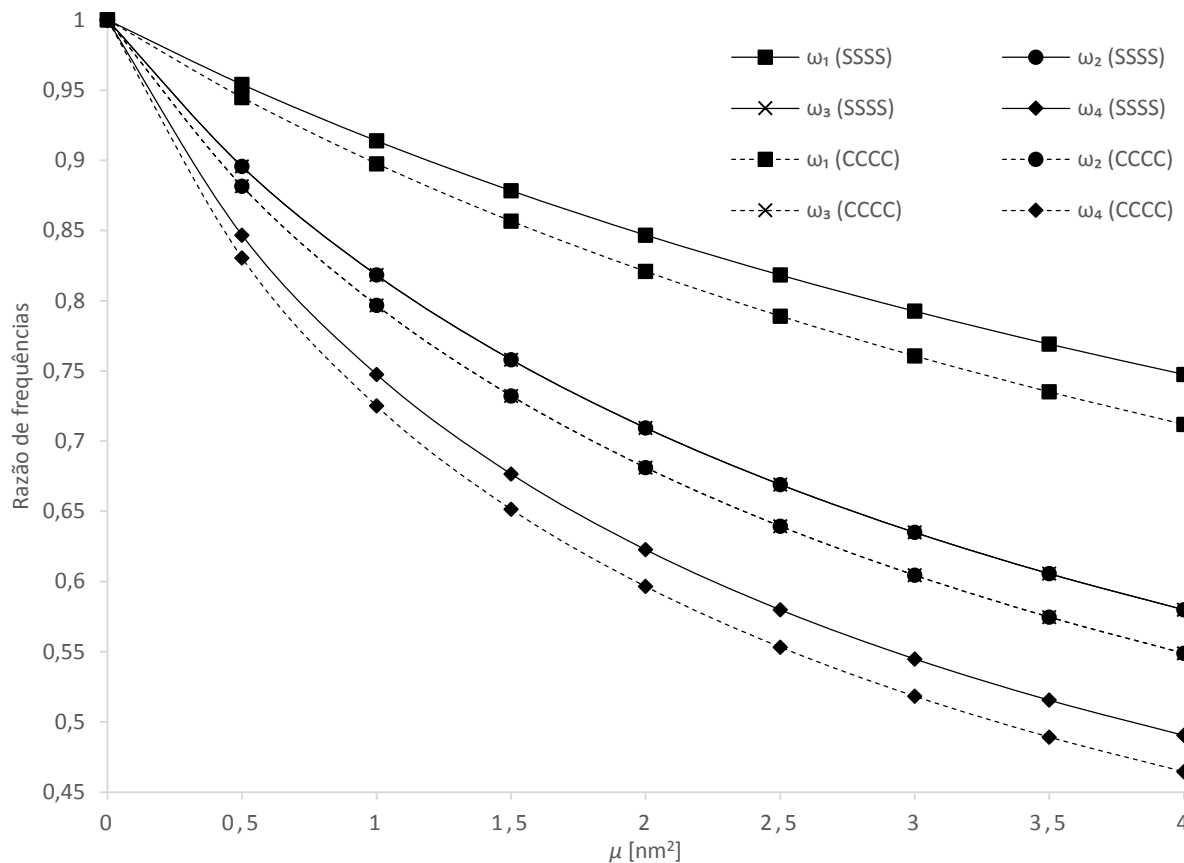


Figura 3.5 – Variação da razão de frequências referente a diferentes frequências naturais

Analisando o comportamento das diferentes razões de frequências, é possível verificar que quanto maior a ordem da frequência, maior é a influência do parâmetro não-local no seu valor, voltando a se verificar que a condição de encastramento é mais sensível ao parâmetro não-local. De referir que a segunda e a terceira frequência natural apresentam uma evolução semelhante, uma vez que correspondem a ondas sinusoidais simétricas (tal como foi referido no estudo de convergência), sendo essa a razão pela qual as suas linhas se encontram sobrepostas.

3.7.3. Formas de vibração

É possível, através das tabelas 3.15 e 3.16, visualizar as quatro primeiras formas de vibração de uma nanoplaca simples, para ambas as condições de fronteira consideradas. Foram obtidos resultados para os valores do parâmetro não-local sugeridos em [44], de modo a que fosse possível compreender se o parâmetro não-local influencia as formas de vibração de uma nanoplaca simples.

Tabela 3.15 – Formas de vibração de uma nanoplaca simplesmente apoiada

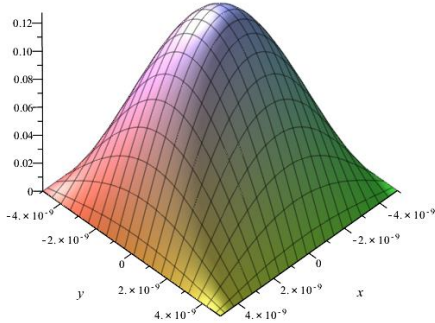
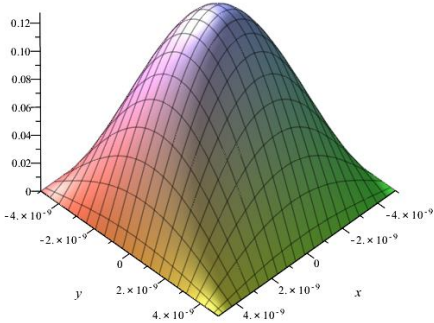
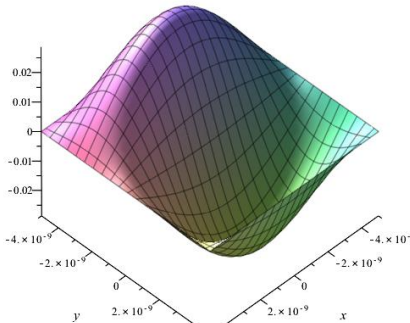
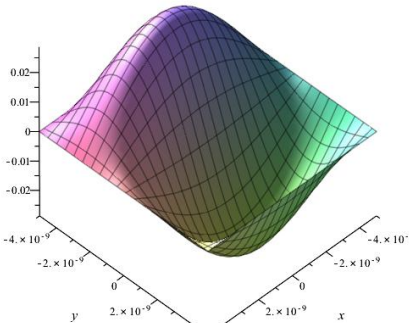
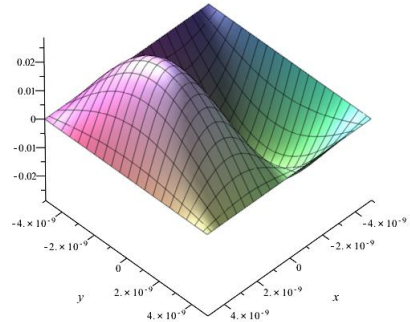
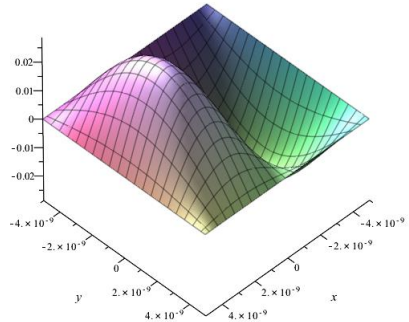
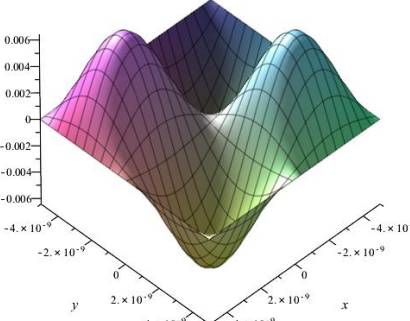
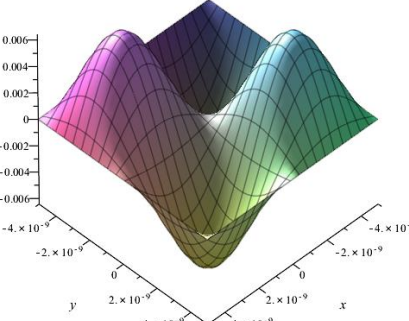
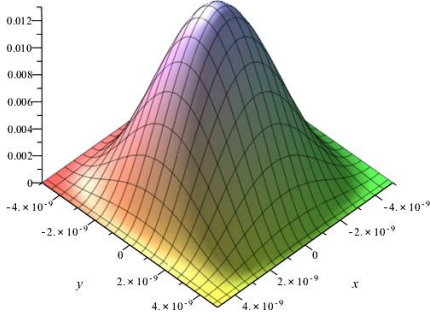
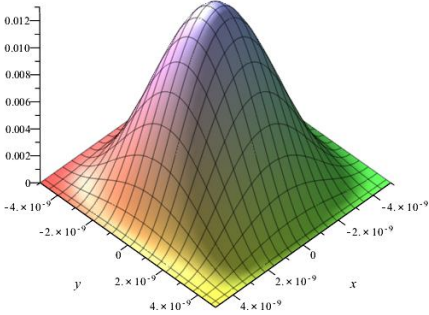
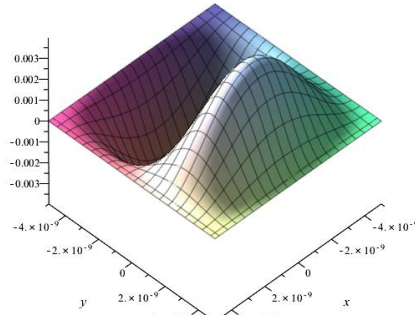
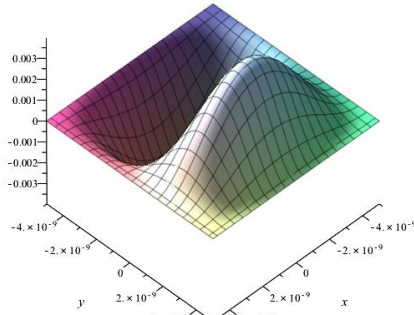
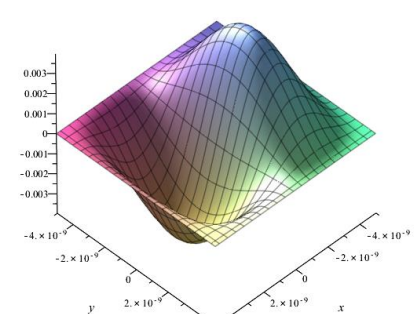
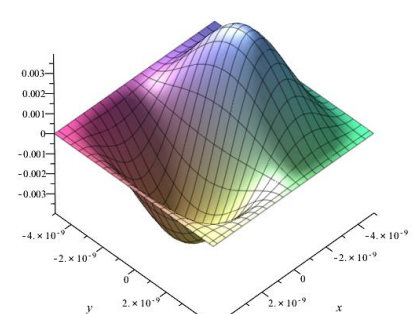
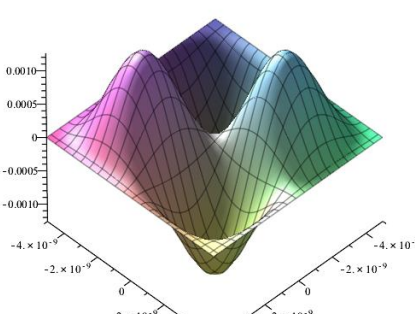
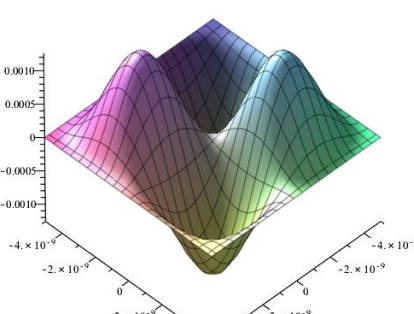
	$\mu = 0 \text{ nm}^2$	$\mu = 1.41 \text{ nm}^2$
$m = 1$ $n = 1$		
$m = 1$ $n = 2$		
$m = 2$ $n = 1$		
$m = 2$ $n = 2$		

Tabela 3.16 – Formas de vibração de uma nanoplaca encastrada

	$\mu = 0 \text{ nm}^2$	$\mu = 0.87 \text{ nm}^2$
$m = 1$ $n = 1$		
$m = 1$ $n = 2$		
$m = 2$ $n = 1$		
$m = 2$ $n = 2$		

Tal como se sucedeu para as nanovigas, foi possível compreender que o parâmetro não-local não exerce influência sob as formas de vibração de uma nanoplaca simples.

4. Nanoplacas de dupla camada

Tendo sido criado com sucesso um modelo que permitisse obter as frequências e formas naturais de uma nanoplaca simples, optou-se por formular um modelo que conseguisse reproduzir o comportamento de uma nanoplaca de dupla camada, isto é, uma estrutura composta por duas nanoplacas simples sobrepostas.

Esta opção foi tomada tendo em conta que, em geral, a maioria das aplicações relacionadas com nanoplacas utilizam estruturas constituídas por várias camadas de nanoplacas, em que as ligações entre cada camada são asseguradas por forças designadas por forças de van der Waals. As forças de van der Waals são definidas como sendo a soma de todas as forças existentes entre moléculas, tanto atrativas como repulsivas, excetuando as forças devido às ligações covalentes e interações electrostáticas [83].

Deste modo, a criação de um novo modelo incidiu principalmente na formulação destas forças, sendo que se recorreu ao modelo de Winkler para uma fundação elástica com o intuito de caracterizar as forças de van der Waals. A figura 4.1 exemplifica a formulação utilizada, em que se considera que as forças de van der Waals são semelhantes às forças exercidas por um conjunto de molas elásticas entre as duas camadas da nanoplaca.

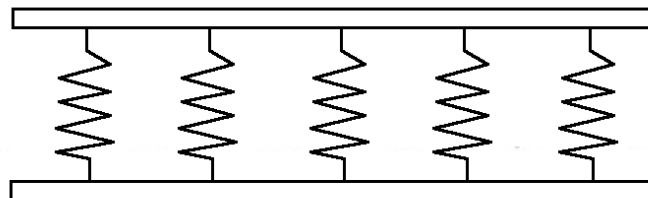


Figura 4.1 – Duas camadas de uma nanoplaca interligadas por forças de van der Waals

Assim sendo, e do mesmo modo que uma mola elástica possui a sua constante elástica, foi necessário conhecer a expressão que definisse a constante referente às forças de van der Waals.

Tendo em conta o artigo de Liew [50], a constante é definida de acordo com a seguinte expressão:

$$C = - \left(\frac{4\sqrt{3}}{9a_{CC}} \right)^2 \frac{24\varepsilon}{\sigma^2} \left(\frac{\sigma}{a_{CC}} \right)^8 \left[\frac{3003\pi}{256} \sum_{k=0}^5 \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{5}{k} \left(\frac{\sigma}{a_{CC}} \right)^6 \frac{1}{h^{12}} \right. \\ \left. - \frac{35\pi}{8} \sum_{k=0}^2 \frac{(-1)^k}{2k+1} \frac{1}{h^6} \right] \quad (4.1)$$

em que a_{CC} é o comprimento da ligação entre dois átomos de carbono, sendo que ε e σ são parâmetros associados com as propriedades físicas do material em questão. Os valores utilizados para definir estes parâmetros foram obtidos a partir de [51]:

$$\begin{aligned} a_{CC} &= 1,42 \text{ \AA} \\ \varepsilon &= 2,968 \text{ meV} \\ \sigma &= 3,407 \text{ \AA} \end{aligned} \quad (4.2)$$

De referir que os parâmetros ε e σ não estão relacionados com o campo de deformações nem com o tensor de tensões. Deste modo, foi possível partir para a formulação do modelo que permitisse obter as frequências e formas naturais de uma nanoplaca de dupla camada.

Uma vez que também foi utilizada a teoria de Kirchhoff para a criação do modelo, não será repetida toda a formulação a ela associada, dado que tal já foi realizado no capítulo referente às nanoplacas simples.

É, contudo, necessário referir que, apesar de as equações que definem tanto os esforços como os campos de deslocamentos e deformações serem idênticas, ambas virão agora acrescidas de um índice i , de modo a possibilitar, mais tarde, a diferenciação entre as duas camadas. Segue, então, a título de exemplo, a definição do campo de deslocamentos:

$$\begin{aligned} u_{x,i}(x, y, z, t) &= u_i(x, y, t) - z \frac{\partial w_i(x, y, t)}{\partial x} \\ u_{y,i}(x, y, z, t) &= v_i(x, y, t) - z \frac{\partial w_i(x, y, t)}{\partial y} \\ u_{z,i}(x, y, z, t) &= w_i(x, y, t) \end{aligned} \quad (4.3)$$

No entanto, uma vez que houve a inclusão de uma nova componente no modelo (forças de van der Waals), foi necessário recorrer novamente ao princípio de Hamilton para a obtenção das equações de movimento em função dos esforços:

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \delta U + \delta V - \delta K \, dt \quad (4.4)$$

De referir que, inicialmente, serão obtidas as equações para uma determinada camada i , sendo posteriormente realizada a diferenciação para cada camada. Assim sendo, os diversos

parâmetros referentes ao princípio de Hamilton são definidos de acordo com as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
\delta U &= \int_A \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \sigma_{xx,i} \delta \varepsilon_{xx,i} + \sigma_{yy,i} \delta \varepsilon_{yy,i} + \sigma_{xy,i} \delta \gamma_{xy,i} \, dz dx dy = \\
&= \int_A \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \sigma_{xx,i} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \delta w_i}{\partial x^2} \right) + \sigma_{yy,i} \left(\frac{\partial \delta v_i}{\partial y} - z \frac{\partial^2 \delta w_i}{\partial y^2} \right) \\
&\quad + \sigma_{xy,i} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_i}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 \delta w_i}{\partial x \partial y} \right) dx dy = \\
&= \int_A \frac{\partial N_{xx,i}}{\partial x} \delta u_i - \frac{\partial^2 M_{xx,i}}{\partial x^2} \delta w_i + \frac{\partial N_{yy,i}}{\partial y} \delta v_i - \frac{\partial^2 M_{yy,i}}{\partial y^2} \delta w_i \\
&\quad + \frac{\partial N_{xy,i}}{\partial y} \delta u_i + \frac{\partial N_{xy,i}}{\partial x} \delta v_i - 2 \frac{\partial^2 M_{xy,i}}{\partial x \partial y} \delta w_i \, dx dy \quad (4.5) \\
K &= \frac{1}{2} \int_A \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \rho \left(\frac{\partial u_{x,i}}{\partial t} \right)^2 + \rho \left(\frac{\partial u_{y,i}}{\partial t} \right)^2 + \rho \left(\frac{\partial u_{z,i}}{\partial t} \right)^2 \, dz dx dy \\
\delta K &= \int_A \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial \delta u_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \frac{\partial \delta v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial w_i}{\partial t} \frac{\partial \delta w_i}{\partial t} - \rho z \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta w_i}{\partial x \partial t} \\
&\quad - \rho z \frac{\partial \delta u_i}{\partial t} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial t} - \rho z \frac{\partial v_i}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta w_i}{\partial y \partial t} - \rho z \frac{\partial \delta v_i}{\partial t} \frac{\partial^2 w_i}{\partial y \partial t} \\
&\quad + \rho z^2 \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 \delta w_i}{\partial x \partial t} + \rho z^2 \frac{\partial^2 w_i}{\partial y \partial t} \frac{\partial^2 \delta w_i}{\partial y \partial t} \, dz dx dy.
\end{aligned}$$

Os termos referentes a ρz^2 foram novamente desprezados, visto que não exercem uma influência significativa no resultado final, tal como foi possível observar nos capítulos anteriores. Deste modo, a expressão referente a δK assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\delta K &= \int_A \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial \delta u_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \frac{\partial \delta v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial w_i}{\partial t} \frac{\partial \delta w_i}{\partial t} - \rho z \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta w_i}{\partial x \partial t} \\
&\quad - \rho z \frac{\partial \delta u_i}{\partial t} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial t} - \rho z \frac{\partial v_i}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta w_i}{\partial y \partial t} - \rho z \frac{\partial \delta v_i}{\partial t} \frac{\partial^2 w_i}{\partial y \partial t} \, dz dx dy \quad (4.6)
\end{aligned}$$

Ao contrário do que aconteceu nos dois capítulos anteriores, o trabalho virtual realizado pelas forças aplicadas (δV) não é nulo, uma vez que estamos sob a presença de forças de van der Waals, sendo que estas serão definidas, inicialmente, como sendo uma força q_i :

$$\delta V = - \int_A q_i \delta w_i dx dy \quad (4.7)$$

pelo que agrupando os termos em relação a cada deslocamento virtual (δu_i , δv_i e δw_i), são obtidas as equações de movimento em função dos esforços para uma determinada camada i :

$$\begin{aligned} \delta u_i : \quad & \frac{\partial N_{xx,i}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy,i}}{\partial y} = \rho h \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \\ \delta v_i : \quad & \frac{\partial N_{yy,i}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy,i}}{\partial x} = \rho h \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} \\ \delta w_i : \quad & -\frac{\partial^2 M_{xx,i}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_{yy,i}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy,i}}{\partial x \partial y} - q_i = \rho h \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Tal como foi referido anteriormente, a definição dos esforços é idêntica à realizada para as nanoplacas simples, pelo que se evitará a sua repetição, sendo assim possível estabelecer as equações de movimento em função dos deslocamentos.

4.1. Equações de movimento

As equações de movimento em função dos deslocamentos para uma determinada camada i foram definidas com recurso às equações (4.8) e às equações dos esforços definidas no capítulo referente às nanoplacas simples, (3.10) e (3.11):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\nu Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial v_i}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(Gh \frac{\partial u_i}{\partial y} + Gh \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) \\ & = \rho h \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \rho h \mu \nabla^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \\ & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial v_i}{\partial y} + \frac{\nu Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(Gh \frac{\partial u_i}{\partial y} + Gh \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) \\ & = \rho h \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} - \rho h \mu \nabla^2 \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} \\ & D \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} + 2D \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^2 \partial y^2} + D \frac{\partial^4 w_i}{\partial y^4} - q_i + \mu \nabla^2 q_i = \rho h \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} - \rho h \mu \nabla^2 \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (4.9)$$

em que, tendo em conta o artigo de Pradhan [53], as forças de van der Waals referentes a cada camada são definidas de acordo com as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} q_1 &= -C(w_1 - w_2) \\ q_2 &= -C(w_2 - w_1) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Assim sendo, foram definidas as seis equações de movimento que caracterizam o comportamento da nanoplaca de dupla camada:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\nu Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(Gh \frac{\partial u_1}{\partial y} + Gh \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \\
& \quad = \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \rho h \mu \nabla^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \\
& \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\nu Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(Gh \frac{\partial u_1}{\partial y} + Gh \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \\
& \quad = \rho h \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} - \rho h \mu \nabla^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} \\
& D \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + 2D \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} + D \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} + (1 - \mu \nabla^2) C(w_1 - w_2) \\
& \quad = \rho h \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - \rho h \mu \nabla^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \\
& \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\nu Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(Gh \frac{\partial u_2}{\partial y} + Gh \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \\
& \quad = \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \rho h \mu \nabla^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \\
& \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\nu Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(Gh \frac{\partial u_2}{\partial y} + Gh \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \\
& \quad = \rho h \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} - \rho h \mu \nabla^2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} \\
& D \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + 2D \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^2 \partial y^2} + D \frac{\partial^4 w_2}{\partial y^4} + (1 - \mu \nabla^2) C(w_2 - w_1) \\
& \quad = \rho h \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} - \rho h \mu \nabla^2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

4.2. Aplicação do método de Galerkin

Seguindo a mesma linha de raciocínio utilizada na implementação dos modelos anteriores, recorreu-se ao método de Galerkin para que fosse possível implementar o modelo numérico no *software Maple*. Assim sendo, os diferentes deslocamentos foram definidos de acordo com as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
u_1(x, y, t) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_i(x) g_j(y) q_{u_1}(t) \\
v_1(x, y, t) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i(x) h_j(y) q_{v_1}(t) \\
w_1(x, y, t) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_i(x) f_j(y) q_{w_1}(t) \\
u_2(x, y, t) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_i(x) k_j(y) q_{u_2}(t) \\
v_2(x, y, t) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n t_i(x) t_j(y) q_{v_2}(t) \\
w_2(x, y, t) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_i(x) r_j(y) q_{w_2}(t)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

em que g , h e f são funções de forma que definem a variação dos respectivos deslocamentos ao longo da primeira camada da nanoplaca, e k , t e r são as funções responsáveis por definir os respectivos deslocamentos ao longo da segunda camada da nanoplaca. Quanto às funções $q_i(t)$, estas são responsáveis por definir a variação dos deslocamentos ao longo do tempo, sendo que n é o número total de funções de forma utilizadas para definir cada um dos deslocamentos.

De modo a permitir a resolução do problema, foi necessário definir as seguintes equações:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{u_1}(u_1(x, y, t)) &= 0 \\
\mathcal{L}_{v_1}(v_1(x, y, t)) &= 0 \\
\mathcal{L}_{w_1}(w_1(x, y, t)) &= 0 \\
\mathcal{L}_{u_2}(u_2(x, y, t)) &= 0 \\
\mathcal{L}_{v_2}(v_2(x, y, t)) &= 0 \\
\mathcal{L}_{w_2}(w_2(x, y, t)) &= 0
\end{aligned} \tag{4.13}$$

No entanto, uma vez que a formulação referente aos deslocamentos u_i e v_i não sofre alteração face à formulação realizada para as nanoplacas simples, apenas se optou por definir as expressões referentes aos deslocamentos w_i , sendo que as restantes expressões encontram-se definidas no Anexo C. Deste modo, os diferentes operadores são definidos de acordo com as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{w_1}(w_1(x, y, t)) &= D \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + 2D \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} + D \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} \\
&+ (1 - \mu \nabla^2) C(w_1 - w_2) - \rho h \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + \rho h \mu \nabla^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \\
\mathcal{L}_{w_2}(w_2(x, y, t)) &= D \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + 2D \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^2 \partial y^2} + D \frac{\partial^4 w_2}{\partial y^4} \\
&+ (1 - \mu \nabla^2) C(w_2 - w_1) - \rho h \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + \rho h \mu \nabla^2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

A definição de um modelo para nanoplacas de dupla camada pela formulação das matrizes de massa e de rigidez da nanoplaca, de modo a ser possível obter as frequências e formas naturais de vibração. As componentes das diversas matrizes são definidas recorrendo-se às expressões abaixo definidas:

$$\begin{aligned}
&\int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} f_i(x) f_j(y) \mathcal{L}(w_1(x, y, t)) \, dx dy \\
&\int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} r_i(x) r_j(y) \mathcal{L}(w_2(x, y, t)) \, dx dy
\end{aligned} \tag{4.15}$$

tendo-se optado por realizar a transformação para variáveis adimensionais (ξ, η) , tal como foi realizado para as nanoplacas simples. Deste modo, as expressões (4.15) assumem a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{2} \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_i(\xi) f_j(\eta) \mathcal{L}(w_1(\xi, \eta, t)) \, d\xi d\eta \\
&\frac{a}{2} \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 r_i(\xi) r_j(\eta) \mathcal{L}(w_2(\xi, \eta, t)) \, d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{4.16}$$

As variáveis auxiliares utilizadas na definição das próximas expressões são idênticas às definidas em (3.20).

Assim sendo, foi necessário definir as expressões responsáveis pela formulação de cada matriz, ou seja, foi necessário compreender quais os termos das expressões (4.14) e (4.16) são referentes às matrizes de massa e às matrizes de rigidez, sendo que as componentes da matriz de rigidez referentes aos deslocamentos w_1 e w_2 são definidas de acordo com as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
K_{w_1 w_1}[i, j] = & \frac{8}{a^3} \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_\alpha(\xi) f_\beta(\eta) D \frac{\partial^4 (f_\theta(\xi) f_\zeta(\eta))}{\partial \xi^4} d\xi d\eta \\
& + \frac{2}{a} \frac{2}{b} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_\alpha(\xi) f_\beta(\eta) 2D \frac{\partial^4 (f_\theta(\xi) f_\zeta(\eta))}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} d\xi d\eta \\
& + \frac{a}{2} \frac{8}{b^3} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_\alpha(\xi) f_\beta(\eta) D \frac{\partial^4 (f_\theta(\xi) f_\zeta(\eta))}{\partial \eta^4} d\xi d\eta \\
& + \frac{a}{2} \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_\alpha(\xi) f_\beta(\eta) C f_\theta(\xi) f_\zeta(\eta) d\xi d\eta \\
& - \frac{2}{a} \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_\alpha(\xi) f_\beta(\eta) C \mu \frac{\partial^2 (f_\theta(\xi) f_\zeta(\eta))}{\partial \xi^2} d\xi d\eta \\
& - \frac{a}{2} \frac{2}{b} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_\alpha(\xi) f_\beta(\eta) C \mu \frac{\partial^2 (f_\theta(\xi) f_\zeta(\eta))}{\partial \eta^2} d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
K_{w_2 w_2}[i, j] = & \frac{8}{a^3} \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 r_\alpha(\xi) r_\beta(\eta) D \frac{\partial^4 (r_\theta(\xi) r_\zeta(\eta))}{\partial \xi^4} d\xi d\eta \\
& + \frac{2}{a} \frac{2}{b} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 r_\alpha(\xi) r_\beta(\eta) 2D \frac{\partial^4 (r_\theta(\xi) r_\zeta(\eta))}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} d\xi d\eta \\
& + \frac{a}{2} \frac{8}{b^3} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 r_\alpha(\xi) r_\beta(\eta) D \frac{\partial^4 (r_\theta(\xi) r_\zeta(\eta))}{\partial \eta^4} d\xi d\eta \\
& + \frac{a}{2} \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 r_\alpha(\xi) r_\beta(\eta) C r_\theta(\xi) r_\zeta(\eta) d\xi d\eta \\
& - \frac{2}{a} \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 r_\alpha(\xi) r_\beta(\eta) C \mu \frac{\partial^2 (r_\theta(\xi) r_\zeta(\eta))}{\partial \xi^2} d\xi d\eta \\
& - \frac{a}{2} \frac{2}{b} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 r_\alpha(\xi) r_\beta(\eta) C \mu \frac{\partial^2 (r_\theta(\xi) r_\zeta(\eta))}{\partial \eta^2} d\xi d\eta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{w_1 w_2}[i, j] = & -\frac{a}{2} \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_{\alpha}(\xi) f_{\beta}(\eta) C r_{\theta}(\xi) r_{\zeta}(\eta) d\xi d\eta \\
& + \frac{2}{a} \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_{\alpha}(\xi) f_{\beta}(\eta) C \mu \frac{\partial^2 (r_{\theta}(\xi) r_{\zeta}(\eta))}{\partial \xi^2} d\xi d\eta \\
& + \frac{a}{2} \frac{2}{b} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_{\alpha}(\xi) f_{\beta}(\eta) D \frac{\partial^2 (r_{\theta}(\xi) r_{\zeta}(\eta))}{\partial \eta^2} d\xi d\eta \\
K_{w_2 w_1}[i, j] = & -\frac{a}{2} \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 r_{\alpha}(\xi) r_{\beta}(\eta) C f_{\theta}(\xi) f_{\zeta}(\eta) d\xi d\eta \\
& + \frac{2}{a} \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 r_{\alpha}(\xi) r_{\beta}(\eta) C \mu \frac{\partial^2 (f_{\theta}(\xi) f_{\zeta}(\eta))}{\partial \xi^2} d\xi d\eta \\
& + \frac{a}{2} \frac{2}{b} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 r_{\alpha}(\xi) r_{\beta}(\eta) D \frac{\partial^2 (f_{\theta}(\xi) f_{\zeta}(\eta))}{\partial \eta^2} d\xi d\eta
\end{aligned}$$

Assim sendo, após a utilização do método de integração por partes para simplificar as derivadas parciais de ordem mais elevada, foi possível obter as expressões simplificadas das diferentes componentes da matriz de rigidez referentes aos deslocamentos w_1 e w_2 :

$$\begin{aligned}
K_{w_1 w_1}[i, j] = & \frac{4b}{a^3} D \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 f_{\alpha}(\xi)}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 f_{\theta}(\xi)}{\partial \xi^2} d\xi \times \int_{-1}^1 f_{\beta}(\eta) f_{\zeta}(\eta) d\eta \\
& + \frac{4}{ab} 2D \int_{-1}^1 \frac{\partial f_{\alpha}(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial f_{\theta}(\xi)}{\partial \xi} d\xi \times \int_{-1}^1 \frac{\partial f_{\beta}(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial f_{\zeta}(\eta)}{\partial \eta} d\eta \\
& + \frac{4a}{b^3} D \int_{-1}^1 f_{\alpha}(\xi) f_{\theta}(\xi) d\xi \times \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 f_{\beta}(\eta)}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 f_{\zeta}(\eta)}{\partial \eta^2} d\eta \\
& + \frac{ab}{4} C \int_{-1}^1 f_{\alpha}(\xi) f_{\theta}(\xi) d\xi \times \int_{-1}^1 f_{\beta}(\eta) f_{\zeta}(\eta) d\eta \\
& + \frac{b}{a} \mu C \int_{-1}^1 \frac{\partial f_{\alpha}(\eta \xi)}{\partial \xi} \frac{\partial f_{\theta}(\xi)}{\partial \xi} d\xi \times \int_{-1}^1 f_{\beta}(\eta) f_{\zeta}(\eta) d\eta \\
& + \frac{a}{b} \mu C \int_{-1}^1 f_{\alpha}(\xi) f_{\theta}(\xi) d\xi \times \int_{-1}^1 \frac{\partial f_{\beta}(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial f_{\zeta}(\eta)}{\partial \eta} d\eta
\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
K_{w_2 w_2}[i, j] &= \frac{4b}{a^3} D \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 r_\alpha(\xi)}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 r_\theta(\xi)}{\partial \xi^2} d\xi \times \int_{-1}^1 r_\beta(\eta) r_\zeta(\eta) d\eta \\
&+ \frac{4}{ab} 2D \int_{-1}^1 \frac{\partial r_\alpha(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial r_\theta(\xi)}{\partial \xi} d\xi \times \int_{-1}^1 \frac{\partial r_\beta(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial r_\zeta(\eta)}{\partial \eta} d\eta \\
&+ \frac{4a}{b^3} D \int_{-1}^1 r_\alpha(\xi) r_\theta(\xi) d\xi \times \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 r_\beta(\eta)}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 r_\zeta(\eta)}{\partial \eta^2} d\eta \\
&+ \frac{ab}{4} C \int_{-1}^1 r_\alpha(\xi) r_\theta(\xi) d\xi \times \int_{-1}^1 r_\beta(\eta) r_\zeta(\eta) d\eta \\
&+ \frac{b}{a} \mu C \int_{-1}^1 \frac{\partial r_\alpha(\eta \xi)}{\partial \xi} \frac{\partial r_\theta(\xi)}{\partial \xi} d\xi \times \int_{-1}^1 r_\beta(\eta) r_\zeta(\eta) d\eta \\
&+ \frac{a}{b} \mu C \int_{-1}^1 r_\alpha(\xi) r_\theta(\xi) d\xi \times \int_{-1}^1 \frac{\partial r_\beta(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial r_\zeta(\eta)}{\partial \eta} d\eta \\
K_{w_1 w_2}[i, j] &= -\frac{ab}{4} C \int_{-1}^1 f_\alpha(\xi) r_\theta(\xi) d\xi \times \int_{-1}^1 f_\beta(\eta) r_\zeta(\eta) d\eta \\
&- \frac{b}{a} \mu C \int_{-1}^1 \frac{\partial f_\alpha(\eta \xi)}{\partial \xi} \frac{\partial r_\theta(\xi)}{\partial \xi} d\xi \times \int_{-1}^1 f_\beta(\eta) r_\zeta(\eta) d\eta \\
&- \frac{a}{b} \mu C \int_{-1}^1 f_\alpha(\xi) r_\theta(\xi) d\xi \times \int_{-1}^1 \frac{\partial f_\beta(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial r_\zeta(\eta)}{\partial \eta} d\eta \\
K_{w_2 w_1}[i, j] &= -\frac{ab}{4} C \int_{-1}^1 r_\alpha(\xi) f_\theta(\xi) d\xi \times \int_{-1}^1 r_\beta(\eta) f_\zeta(\eta) d\eta \\
&- \frac{b}{a} \mu C \int_{-1}^1 \frac{\partial r_\alpha(\eta \xi)}{\partial \xi} \frac{\partial f_\theta(\xi)}{\partial \xi} d\xi \times \int_{-1}^1 r_\beta(\eta) f_\zeta(\eta) d\eta \\
&- \frac{a}{b} \mu C \int_{-1}^1 r_\alpha(\xi) f_\theta(\xi) d\xi \times \int_{-1}^1 \frac{\partial r_\beta(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial f_\zeta(\eta)}{\partial \eta} d\eta
\end{aligned}$$

As expressões que definem as componentes da matriz de massa referentes aos vários deslocamento encontram-se definidas em Anexo D, uma vez que não sofrem alterações face às expressões definidas no capítulo das nanoplacas simples, (3.26) e (3.27). Deste modo, foi possível definir a forma matricial das equações de movimento, encontrando-se a mesma no Anexo E.

4.3. Estudo de convergência

Tal como nos capítulos prévios, foi necessário realizar um estudo da convergência do modelo numérico criado, ou seja, determinar o número de funções de forma a partir do qual os resultados estabilizam.

No entanto, uma vez que estamos perante uma nanoplaca de dupla camada, será conveniente introduzir uma nova definição das diferentes frequências naturais, dado que existem dois tipos de frequências naturais:

- ω_i^1 serão as frequências naturais para as quais as duas camadas vibram em fase, ou seja, as suas formas de vibração são idênticas;
- ω_i^2 serão as frequências naturais para as quais as duas camadas vibram em oposição de fase, ou seja, as suas formas de vibração são simétricas.

Assim sendo, foram obtidas as duas primeiras frequências naturais para ambos os regimes de vibração (em fase e em oposição de fase), tendo sido utilizadas desde 4 até 11 funções de forma.

Os valores utilizados para definir os parâmetros relativos à geometria e material da nanoplaca são idênticos aos utilizados no capítulo anterior. No entanto, uma vez que estamos perante uma nanoplaca sujeita a forças de van der Waals, foi necessário definir a constante referente a estas forças:

$$C = -1,086567918 \times 10^{20} \text{ Pa/m} \quad (4.19)$$

O valor desta constante foi confirmado pelo artigo de Liew [51].

Quanto às condições de fronteira, estas foram definidas como sendo simplesmente apoiadas em todos os lados de ambas as camadas da nanoplaca.

A análise de convergência do modelo foi realizada tendo em consideração que os valores obtidos para as frequências naturais ao utilizar 11 funções de forma seriam os valores de referência, tendo sido registada a diferença (em valor absoluto) entre esse valor e os restantes valores obtidos para um número inferior de funções de forma, tal como se pode observar nas tabelas 4.1 - 4.4. Uma vez que os valores da frequência se encontram em Hz, a relevância das diferenças por vezes podem ser de difícil visualização, tendo, por isso, se optado por também obter o erro relativo entre os valores, de modo a facilitar a compreensão da tabela.

De referir que o número elevado de algarismos significativos foi apenas utilizado de modo a permitir a perceção das diferenças existentes entre os vários valores obtidos.

Verifica-se que a partir do uso de 8 funções de forma a variação existente deixa de ser significativa, sendo que esta situação apenas se verifica para a segunda frequência natural para um regime de vibração em fase. No que diz respeito às outras frequências naturais, a variação deixa de ser significativa a partir do uso de 6 funções de forma. No entanto, por motivos de maior precisão, serão usadas 11 funções de forma, uma vez que a variação no esforço computacional é insignificante.

Tabela 4.1 – Estudo da convergência da primeira frequência natural (Hz) para vibrações em fase

n	$\omega_1^{1,i}$	$ \omega_1^{1,i} - \omega_1^{1,i=11} $	Erro relativo (%)
4	69.133.035.446,6429	11.366.986,16	0,01644
5	69.121.673.424,7916	4.964,312698	0,00001
6	69.121.673.424,7864	4.964,30751	0,00001
7	69.121.668.461,1741	0,695205688	0,00000
8	69.121.668.461,1758	0,696899414	0,00000
9	69.121.668.460,5343	0,055404663	0,00000
10	69.121.668.460,5168	0,037902832	0,00000
11	69.121.668.460,4789	0,00000	0,00000

Tabela 4.2 – Estudo da convergência da segunda frequência natural (Hz) para vibrações em fase

n	$\omega_2^{1,i}$	$ \omega_2^{1,i} - \omega_2^{1,i=11} $	Erro relativo (%)
4	173.307.088.513,169	502.920.061,8	0,29103
5	173.304.255.380,891	500.086.929,6	0,28940
6	172.806.268.181,429	2.099.730,106	0,00122
7	172.806.267.041,075	2.098.589,752	0,00121
8	172.804.171.216,856	2.765,53299	0,00000
9	172.804.171.216,730	2.765,407013	0,00000
10	172.804.168.451,306	0,016998291	0,00000
11	172.804.168.451,323	0,00000	0,00000

Tabela 4.3 – Estudo da convergência da primeira frequência natural (Hz) para vibrações em oposição de fase

n	$\omega_1^{2,i}$	$ \omega_1^{2,i} - \omega_1^{2,i=11} $	Erro relativo (%)
4	2.683.348.215.134,1600	292.831,3501	0,00001
5	2.683.347.922.430,6900	127,8798828	0,00000
6	2.683.347.922.430,6900	127,8798828	0,00000
7	2.683.347.922.302,8300	0,020019531	0,00000
8	2.683.347.922.302,8200	0,00000	0,00000
9	2.683.347.922.302,8100	0,00000	0,00000
10	2.683.347.922.302,8100	0,00000	0,00000
11	2.683.347.922.302,8100	0,00000	0,00000

Tabela 4.4 – Estudo da convergência da primeira frequência natural (Hz) para vibrações em oposição de fase

n	$\omega_2^{2,i}$	$ \omega_2^{2,i} - \omega_2^{2,i=11} $	Erro relativo (%)
4	2.688.050.150.842,240	32.377.991,16	0,00120
5	2.688.049.968.182,560	32.195.331,48	0,00120
6	2.688.017.907.836,880	134.985,7998	0,00001
7	2.688.017.907.763,560	134.912,48	0,00001
8	2.688.017.773.028,880	177,7998047	0,00000
9	2.688.017.773.028,870	177,7900391	0,00000
10	2.688.017.772.851,080	0,00000	0,00000
11	2.688.017.772.851,080	0,00000	0,00000

4.4. Validação do modelo

Tal como nos capítulos anteriores, recorreu-se à comparação com valores existentes na literatura de modo a averiguar se os resultados obtidos pelo modelo criado seriam coerentes.

Assim sendo, recorreu-se aos seguintes artigos para comparar os resultados obtidos:

- [51], uma vez permite verificar os valores das menores frequências naturais para ambos os dois tipos de vibrações (em fase e em oposição de fase), não tendo em conta, no entanto, o valor do parâmetro não-local;
- [53], visto que fornece expressões para o cálculo das diferentes frequências naturais para ambos os regimes de vibração;
- [58], dado que contém valores referentes às menores frequências de vibração, para um regime de vibração em fase, tendo em conta o parâmetro não-local;
- [54], uma vez que permite a comparação do menor valor da frequência natural para ambos os regimes de vibração, face a diferentes valores do parâmetro não-local;

Deste modo, os valores que definem os parâmetros característicos da nanoplaca utilizados nas diferentes comparações encontram-se registados na tabela 4.5.

Tabela 4.5 – Valores utilizados para a validação do modelo referente às nanoplacas de dupla camada [54]

a (nm)	h (nm)	E (TPa)	ν	ρ (kg/m ³)
10,00	0,34	1,06	0,25	2250,00

As tabelas 4.6 e 4.7 estabelecem a comparação entre os valores obtidos referentes às menores frequências naturais para ambos os regimes de vibração com os valores fornecidos pelo artigo de He *et al.* [51] e com os valores obtidos através das expressões sugeridas por Pradhan e Phadikar [53]. De referir que os valores das frequências naturais que constam das tabelas 4.6 e 4.7 encontram-se expressos em THz.

Após análise das mesmas, é possível afirmar que, uma vez que não existem diferenças entre os diferentes valores obtidos, o modelo consegue obter com precisão os valores das várias frequências naturais de uma nanoplaca de dupla camada, não tendo em conta, no entanto, o parâmetro não-local.

Assim sendo, realizou-se a comparação com a referência [58], de modo a verificar se o modelo criado era capaz de obter valores coerentes, face a diferentes valores do parâmetro não-local, sendo que os diferentes valores obtidos encontram-se registados na tabela 4.8.

Verifica-se que os resultados obtidos tendo em conta diferentes valores do parâmetro não-local são bastante satisfatórios, uma vez que as diferenças relativas na ordem dos 1% se devem ao facto de Ansari *et al.* [58] utilizar uma teoria de deformação de corte de primeira ordem.

No entanto, optou-se por realizar também a comparação com a referência [54], visto que, apesar de este apenas obter valores da menor frequência natural para cada regime de vibração, valores do parâmetro não-local para além do unitário são considerados. Os valores referentes a esta comparação encontram-se definidos na tabela 4.9.

Tabela 4.6 – Valores de várias frequências naturais (THz) para vibrações em fase

m	n	Modelo formulado	Ref. [51]	Ref. [53]
1	1	0,06912	0,069	0,06912
	2	0,17280	0,173	0,17280
	3	0,34561	0,346	0,34561
2	1	0,17280	0,173	0,17280
	2	0,27649	0,276	0,27649
	3	0,44929	0,449	0,44929
3	1	0,34561	0,346	0,34561
	2	0,44929	0,449	0,44929
	3	0,62210	0,622	0,62210

Tabela 4.7 – Valores das várias frequências naturais (THz) para vibrações em oposição de fase

m	n	Modelo formulado	Ref. [51]	Ref. [53]
1	1	2,68335	2,683	2,68335
	2	2,68802	2,688	2,68802
	3	2,70463	2,705	2,70463
2	1	2,68802	2,688	2,68802
	2	2,69667	2,697	2,69667
	3	2,71982	2,720	2,71982
3	1	2,70463	2,705	2,70463
	2	2,74605	2,720	2,71982
	3	2,75365	2,754	2,75365

Tabela 4.8 – Valores das frequências naturais (THz) tendo em conta o parâmetro não-local

μ	ω	Modelo formulado	Ref. [58]	Diferença relativa (%)
0	ω_1	0,27649	0,2730	1,27717
	ω_2	0,69122	0,6821	1,33656
	ω_3	0,69122	0,6821	1,33656
	ω_4	1,10595	1,0910	1,37000
	ω_5	1,38243	1,3635	1,38858
	ω_6	1,38243	1,3635	1,38858
	ω_7	1,79716	1,7719	1,42578
	ω_8	1,79716	1,7719	1,42578
	ω_9	2,35017	2,3525	0,09904
1	ω_1	0,20668	0,2040	1,31410
	ω_2	0,40082	0,3956	1,31954
	ω_3	0,40082	0,3956	1,31954
	ω_4	0,54235	0,5350	1,37337
	ω_5	0,62149	0,6130	1,38549
	ω_6	0,62149	0,6130	1,38549
	ω_7	0,72574	0,7155	1,43083
	ω_8	0,72574	0,7155	1,43083
	ω_9	0,84632	0,8442	0,25096

Tabela 4.9 – Valores das frequências naturais para diferentes valores do parâmetro não-local

ω	μ (nm ²)	Modelo formulado	Ref. [54]	Diferença relativa (%)
ω^1	0	0,06912	0,06912	0,00241
	0,25	0,06748	0,06748	0,00475
	1	0,06317	0,06317	0,00342
	2,25	0,05752	0,05752	0,00188
	4	0,05167	0,05167	0,00037
ω^2	0	2,68335	2,68328	0,00253
	0,25	2,68331	2,68323	0,00283
	1	2,68320	2,68313	0,00265
	2,25	2,68307	2,68300	0,00276
	4	2,68296	2,68288	0,00280

Deste modo, confirma-se que o modelo criado é capaz de obter os valores das frequências naturais tendo em conta diferentes valores do parâmetro não-local.

4.5. Análise dos resultados

Para que fosse possível estudar o comportamento de uma nanoplaca de dupla camada face à variação de diferentes parâmetros, foi necessário definir tanto a geometria como o material da nanoplaca.

Assim sendo, o valor dos diferentes parâmetros utilizados para a obtenção dos resultados são idênticos aos registados na tabela 4.5, excetuando os casos em que os resultados sejam obtidos em função da variação de um destes mesmos parâmetros.

4.5.1. Influência das dimensões da nanoplaca nas frequências naturais

Através da figura 4.2 é possível observar a variação da primeira frequência natural para um regime de vibração em fase com o aumento do comprimento da nanoplaca. Por outro lado, os resultados referentes à primeira frequência natural para um regime de vibração em oposição de fase encontram-se registados na tabela 4.10.

Uma vez que não foram encontrados na literatura valores característicos do parâmetro não-local para as condições de fronteira consideradas, optou-se por obter resultados para valores padrão do parâmetro não-local.

É possível verificar que a variação da primeira frequência natural para um regime de vibração em fase apresenta uma variação idêntica à variação da primeira frequência natural de uma nanoplaca simples, sendo assim coerente com a expressão de Pradhan e Phadikar [53], que nos indica que a primeira frequência natural para um regime de vibração em fase não é influenciada pelas forças de van der Waals.

Quanto à primeira frequência natural para um regime de vibração em oposição de fase, verifica-se que esta não apresenta diferenças tão significativas como as frequências em regime de vibração em fase, levando a que se possa afirmar que as frequências naturais para um regime em oposição de fase são principalmente influenciadas pelas forças de van der Waals.

No entanto, ambas as frequências naturais apresentam uma variação semelhante face ao aumento do comprimento da nanoplaca, sendo que a influência do aumento do comprimento é mais notória nas frequências naturais em regime de vibração em fase.

É possível ainda constatar que a condição de encastramento gera frequências naturais mais elevadas, sendo no entanto esse efeito mais visível na figura 4.2.

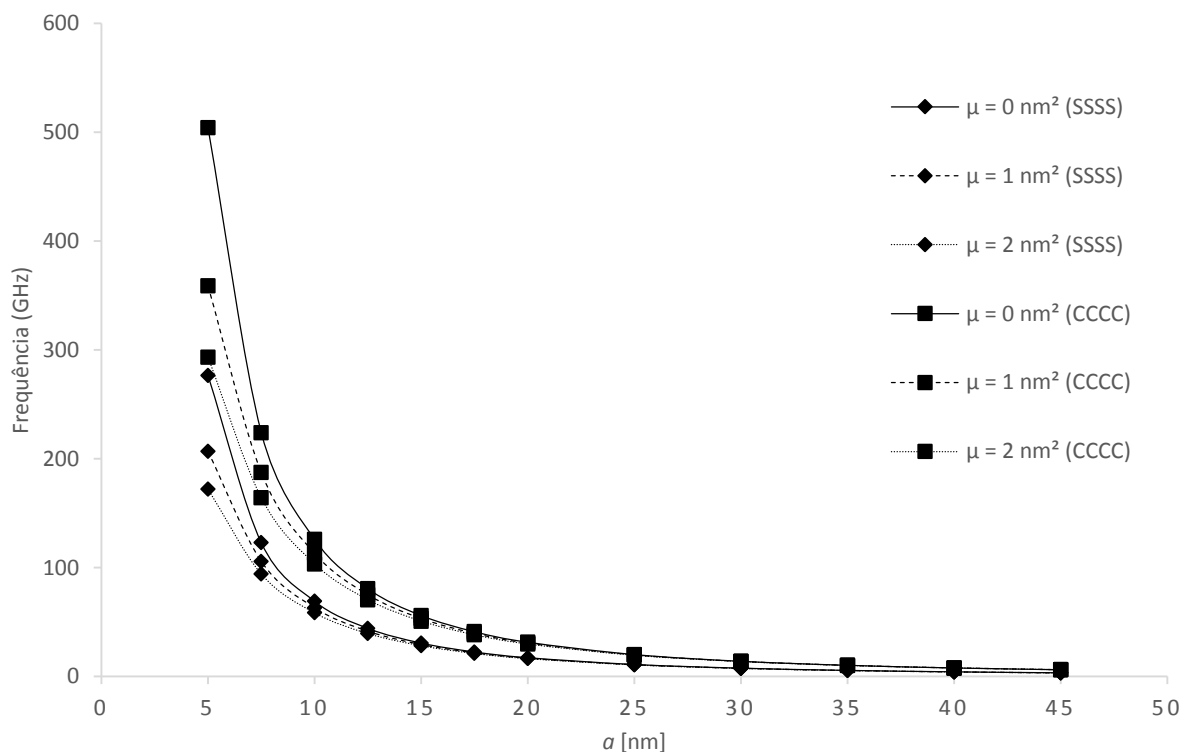


Figura 4.2 – Variação da primeira frequência natural referente a vibrações em fase com o comprimento, para ambas as condições de fronteira

Tabela 4.10 – Valores da primeira frequência natural referente (GHz) a vibrações em oposição de fase, para ambas as condições de fronteira e tendo em conta diferentes valores do parâmetro não-local

Cond. Fronteira	a (nm)	$\mu = 0 \text{ nm}^2$	$\mu = 1 \text{ nm}^2$	$\mu = 2 \text{ nm}^2$
SSSS	5	2696,66890	2690,40800	2687,97656
	10	2683,34792	2683,20116	2683,09593
	15	2682,63341	2682,61923	2682,60716
	20	2682,51316	2682,51055	2682,50817
	30	2682,46850	2682,46826	2682,46804
	40	2682,46098	2682,46094	2682,46090
CCCC	5	2729,40257	2706,35160	2698,42877
	10	2685,41562	2684,84086	2684,45084
	15	2683,04208	2682,98560	2682,93890
	20	2682,64248	2682,63199	2682,62261
	30	2682,49405	2682,49309	2682,49219
	40	2682,46907	2682,46890	2682,46873

4.5.2. Influência do parâmetro não-local nas frequências naturais

A figura 4.3 ilustra a variação da primeira frequência natural em regime de vibração em fase face ao aumento do parâmetro não-local, tendo sido utilizada, novamente, uma razão entre frequências para realizar a comparação entre as frequências para as duas condições de fronteira consideradas.

De modo a permitir uma melhor interpretação da figura, encontram-se registados na tabela 4.11 os valores das frequências naturais quando o parâmetro não-local assume um valor nulo.

Quanto às frequências naturais para um regime de vibração em oposição de fase, os seus valores encontram-se registados na tabela 4.12, uma vez que apresentam uma variação insignificativa, o que levaria a que os gráficos referentes à sua variação se traduzissem em linhas horizontais.

De referir que os valores das frequências de ambas as tabelas encontram-se expressos em GHz.

Tabela 4.11 – Valores da primeira frequência natural local (GHz) referentes à figura 4.3

	$a = 10 \text{ nm}$	$a = 20 \text{ nm}$	$a = 30 \text{ nm}$
Simplesmente apoiado	69,12167	17,28041	7,68017
Encastramento	126,01095	31,50275	14,00122

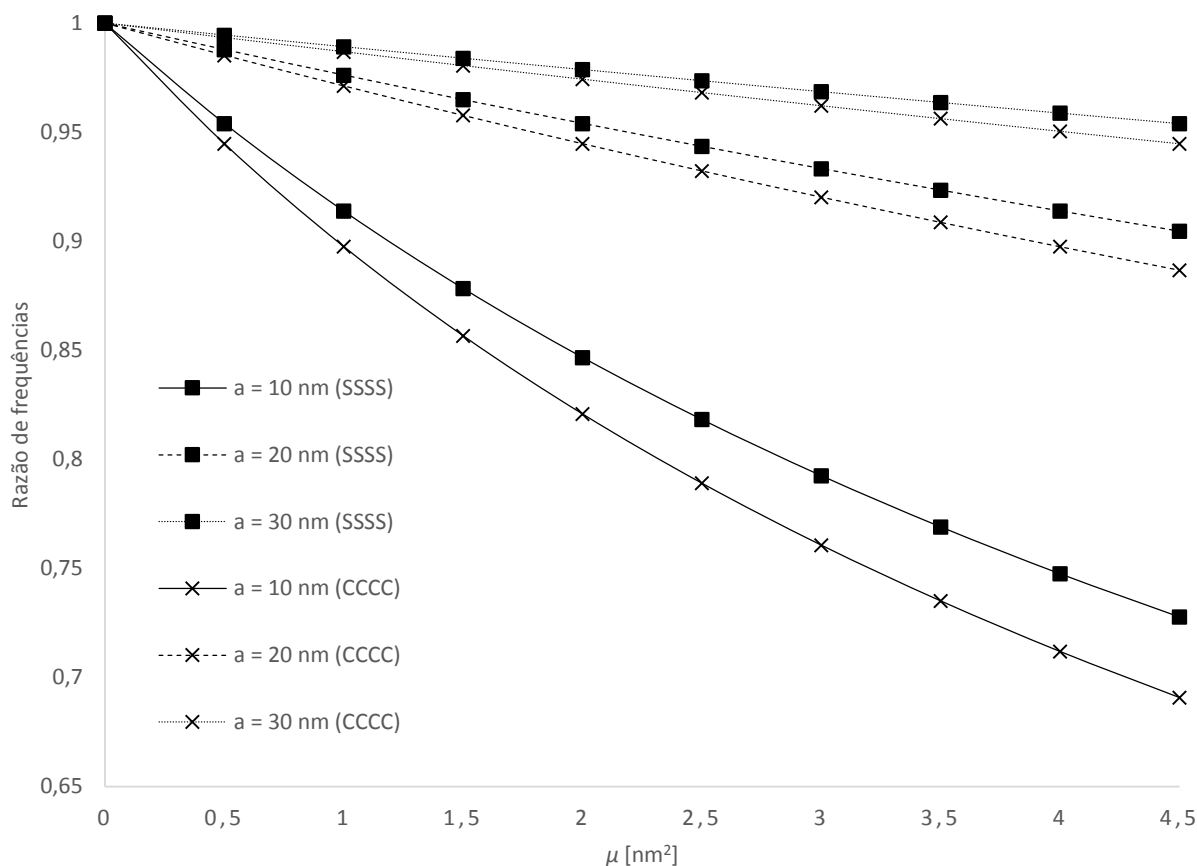


Figura 4.3 – Variação da razão de frequências referente a vibrações em fase para diferentes valores do comprimento

Tabela 4.12 – Valores da primeira frequência natural (GHz) referente a vibrações em oposição de fase, para ambas as condições de fronteira e tendo em conta diferentes comprimentos

Cond. Fronteira	μ (nm ²)	$a = 10$ nm	$a = 20$ nm	$a = 30$ nm
SSSS	0	2683,34792	2682,51316	2682,46850
	1	2683,20116	2682,51055	2682,46826
	4,5	2682,92910	2682,50305	2682,46751
CCCC	0	2685,41562	2682,64248	2682,49405
	1	2684,84086	2682,63199	2682,49309
	4,5	2683,86941	2682,60298	2682,49012

Ao analisar a figura 4.3, é possível verificar que a mesma é bastante semelhante à figura 3.4 do capítulo das nanoplacas simples. Esta semelhança vem comprovar o que já havia sido referido na análise à influência das dimensões da nanoplaca nas frequências naturais: a primeira frequência natural em regime de vibração não é influenciada pelas forças de van der Waals.

A variação insignificativa da primeira frequência natural para um regime de vibração em oposição de fase veio também comprovar que estas frequências são, essencialmente, dominadas pelas forças de van der Waals, uma vez que os seus valores se mantêm praticamente constantes face à variação tanto do parâmetro não-local como das condições de fronteira.

Quanto à comparação da influência do parâmetro não-local nas quatro primeiras frequências naturais para um regime de vibração em fase, esta encontra-se ilustrada na figura 4.4 em função de uma razão de frequências, sendo que na tabela 4.13 encontram-se registados os valores das frequências quando o parâmetro não-local assume um valor nulo.

Por outro lado, as frequências naturais para um regime de vibração em oposição de fase encontram-se definidas na tabela 4.14, dado que a razão entre as suas frequências apresenta uma variação máxima abaixo do 1%.

Verifica-se, novamente, que as frequências naturais em regime de vibração em fase de uma nanoplaca de dupla camada assumem um comportamento semelhante às frequências naturais de uma nanoplaca simples. Quanto às frequências naturais para um regime de vibração em oposição de fase, confirma-se que a influência tanto do parâmetro não-local como das condições de fronteira sobre estas frequências é praticamente insignificante.

Tabela 4.13 – Valores das várias frequências naturais locais (GHz) referentes à figura 4.4

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
Simplesmente apoiado	69,12167	172,80417	172,80417	276,48667
Encastramento	126,01095	257,00651	257,00651	378,94666

Tabela 4.14 – Valores das várias frequências naturais (GHz) referentes a vibrações em oposição de fase, para ambas as condições de fronteira

	μ (nm ²)	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
SSSS	0	2683,34792	2688,01777	2688,01777	2696,66890
	4	2682,95510	2684,32847	2684,32847	2685,88199
CCCC	0	2685,41562	2694,74129	2694,74129	2709,09189
	4	2683,95712	2686,16356	2686,16356	2688,22749

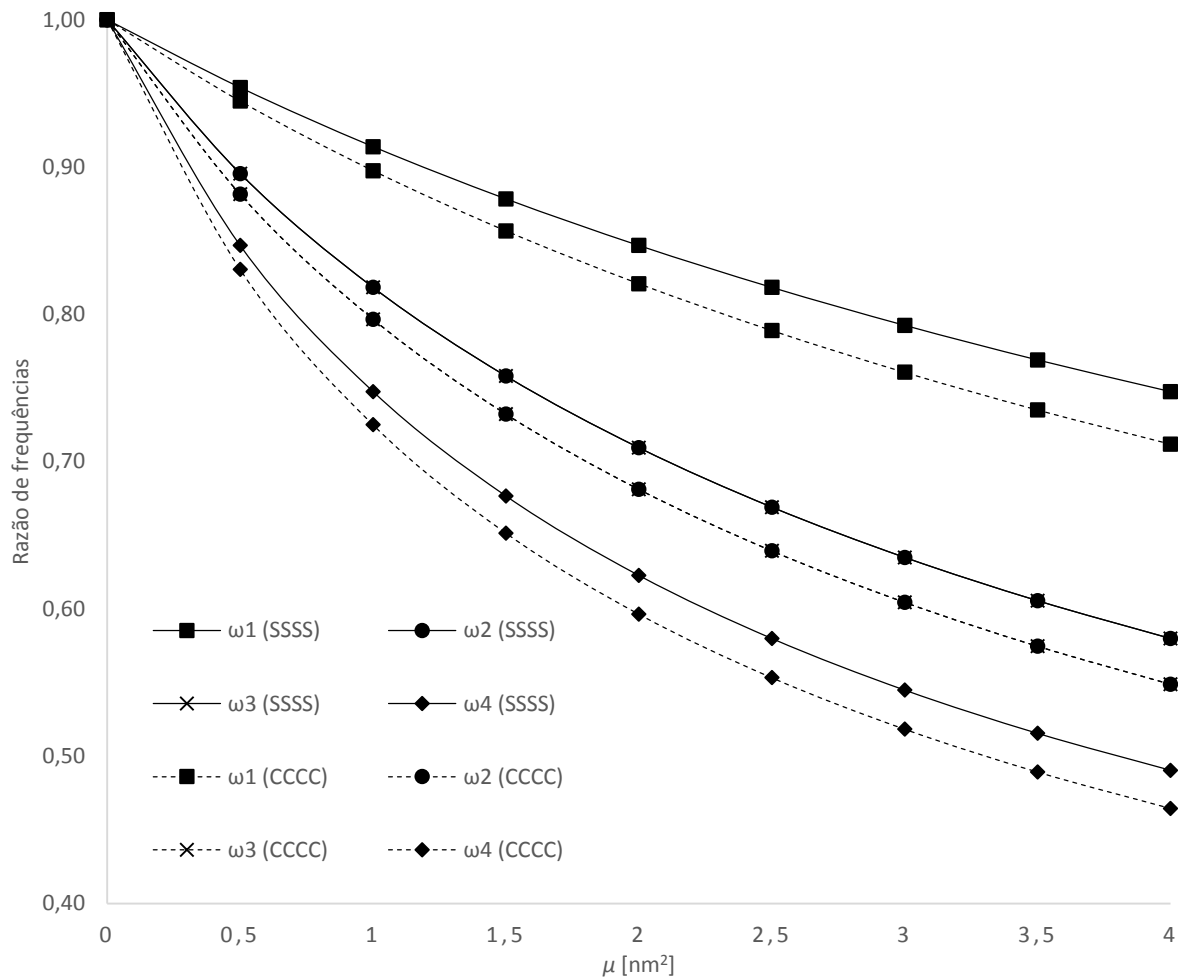


Figura 4.4 – Variação das diferentes razões de frequências referente a vibrações em fase

4.5.3. Formas de vibração

Uma vez que foi verificado nos capítulos anteriores que o parâmetro não-local não influencia as formas de vibração (quer de uma nanoviga, como de uma nanoplaca simples), apenas serão apresentadas as formas de vibração para um valor nulo do parâmetro não-local. No entanto, uma vez que se tratam de nanoplacas de dupla camada, serão analisadas as formas de vibração de ambas as placas referentes às duas situações possíveis de vibração: em fase e em oposição de fase. Deste modo, é possível visualizar, através das tabelas 4.15 e 4.16, as diferentes formas de vibração de ambas as camadas, para uma condição de apoio simples.

Tabela 4.15 – Formas de vibração de ambas as camadas para vibrações em fase de uma nanoplaca simplesmente apoiada

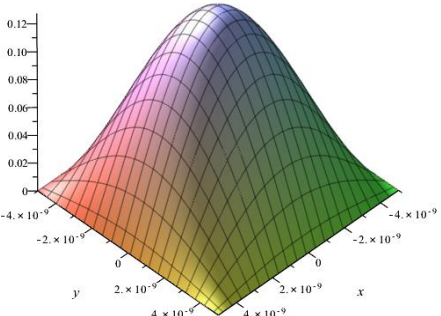
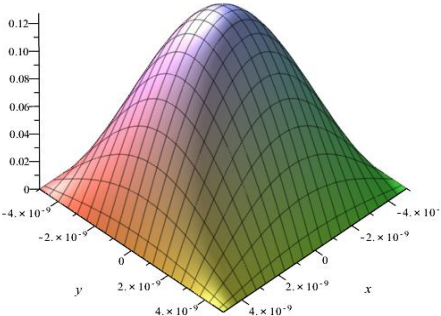
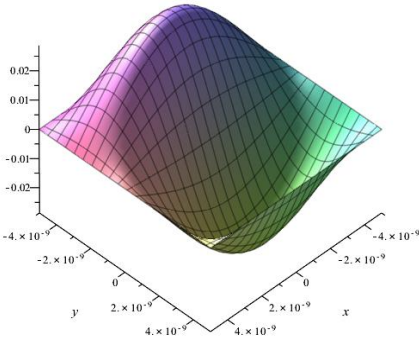
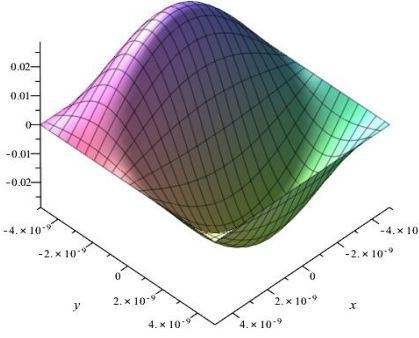
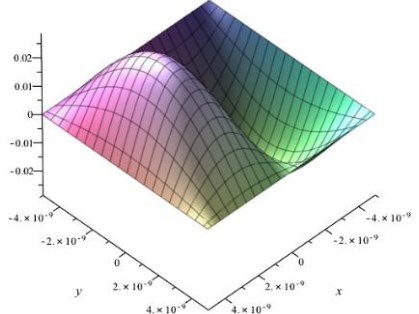
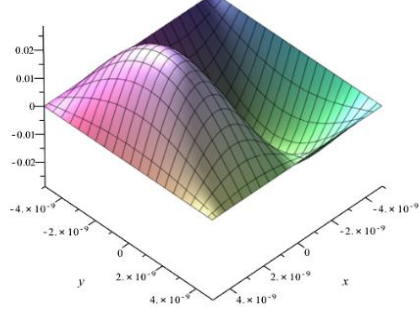
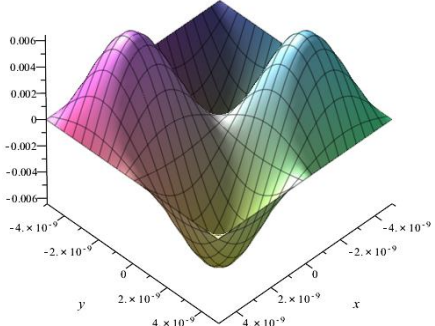
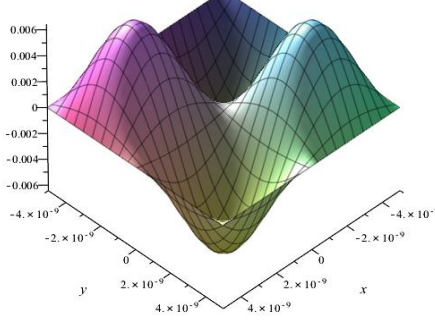
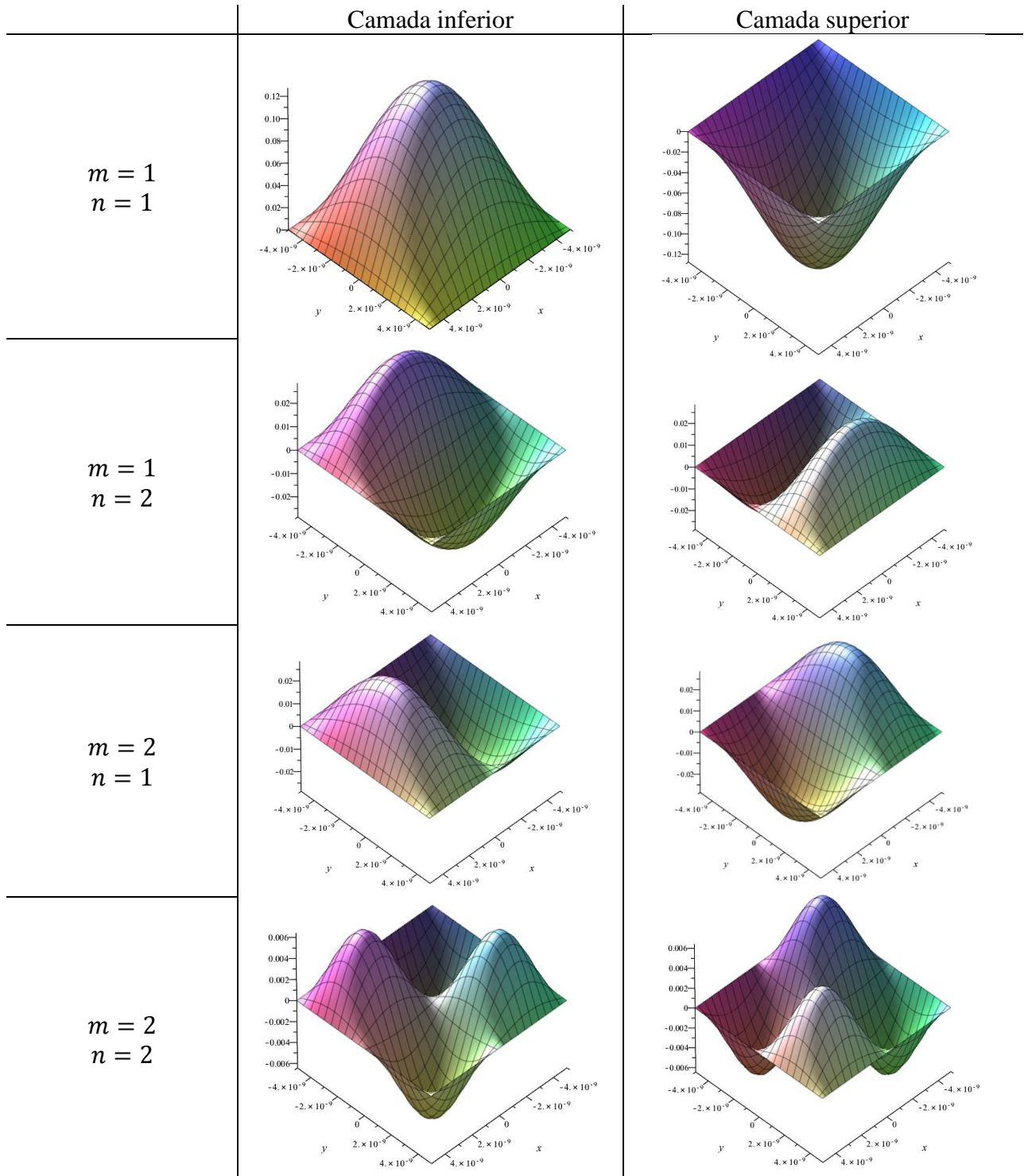
	Camada inferior	Camada superior
$m = 1$ $n = 1$		
$m = 1$ $n = 2$		
$m = 2$ $n = 1$		
$m = 2$ $n = 2$		

Tabela 4.16 – Formas de vibração de ambas as camadas para vibrações em oposição de fase de uma nanoplaca simplesmente apoiada



Assim sendo, verificou-se a existência de valores das frequências naturais para os quais as camadas constituintes da nanoplaca apresentam formas de vibração simétricas, ou seja, foi possível verificar a existência de vibrações em oposição de fase numa nanoplaca de dupla camada.

5. Nanoplacas magneto-electro-elásticas

Após terem sido adquiridos conhecimentos na formulação de diferentes modelos numéricos para nanoplacas, optou-se por estudar nanoplacas com características magnéticas e elétricas (denominadas nanoplacas magneto-electro-elásticas), e assim criar um modelo que permitisse obter as suas frequências e formas naturais de vibração.

Esta opção foi tomada tendo em conta os recentes avanços em campos relacionados com materiais inteligentes, cujos componentes envolvem materiais piezomagnéticos e piezoelétricos. Estes materiais inteligentes são designados por compósitos magneto-electro-elásticos, e têm a capacidade de converter uma forma de energia (desde magnética e elétrica até energia mecânica) em outra. Para além disso, estes materiais exibem um efeito magneto-elétrico que não se encontra presente em materiais apenas piezomagnéticos ou piezoelétricos [74].

Assim sendo, foi criado um modelo numérico que permitisse obter as frequências e formas naturais de uma nanoplaca com propriedades magneto-elétricas. Uma vez que na literatura atual é sempre referido a existência de um meio elástico no qual a nanoplaca se encontra inserida (mais concretamente uma fundação de Pasternak) [74, 76], foi também incluído no modelo esse mesmo meio elástico, tal como ilustra a figura 5.1.

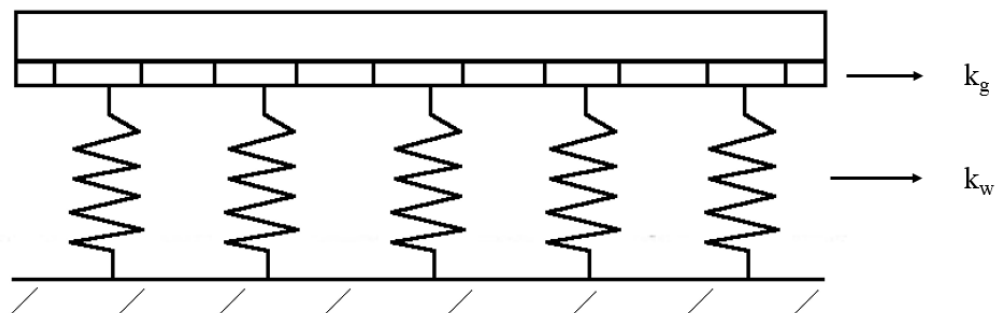


Figura 5.1 – Ilustração exemplificativa de uma nanoplaca inserida num meio elástico de Pasternak

De referir que a nanoplaca encontra-se sujeita a uma diferença de potenciais elétricos e magnéticos (V_0 e Ω_0 , respetivamente) entre a sua superfície superior e inferior, tal como indicam as seguintes condições de fronteira:

$$\begin{aligned}
 \phi(h/2) &= V_0 \\
 \varphi(h/2) &= \Omega_0 \\
 \phi(-h/2) &= 0 \\
 \varphi(-h/2) &= 0
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

em que ϕ e φ são os potenciais elétrico e magnético, respetivamente.

A teoria utilizada para a formulação do modelo foi, novamente, a teoria de Kirchhoff, sendo que os campos de deslocamentos e de deformações são idênticos aos mencionados no capítulo referente às nanoplacas simples.

No entanto, uma vez que estamos perante uma nanoplaca com propriedades diferentes das mencionadas anteriormente, foi necessário redefinir as relações constitutivas, sendo que para uma nanoplaca isotrópica elas são definidas de acordo com as seguintes expressões [74, 76]:

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} - \mu \nabla^2 \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} E/(1-\nu^2) & \nu E/(1-\nu^2) & 0 \\ \nu E/(1-\nu^2) & E/(1-\nu^2) & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \\
 - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & f_{31} \\ 0 & 0 & f_{31} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix} \\
 \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} - \mu \nabla^2 \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} h_{11} & 0 & 0 \\ 0 & h_{22} & 0 \\ 0 & 0 & h_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} \\
 - \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix} \\
 \begin{Bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{Bmatrix} - \mu \nabla^2 \begin{Bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ f_{31} & f_{31} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} \\
 - \begin{bmatrix} \mu_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

em que e_{ij} , f_{ij} e g_{ij} são as constantes piezoelétricas, piezomagnéticas e magneto-elétricas, respetivamente, sendo que h_{ij} e μ_{ij} são os coeficientes de permeabilidade dielétrica e magnética, respetivamente. Por outro lado, E_i e H_i representam a intensidade dos campos

elétricos e magnéticos, sendo que D_i e B_i representam a mudança do campo elétrico e a indução magnética, respetivamente. No entanto, para que as equações de eletromagnetismo definidas por Maxwell sejam respeitadas, é necessário que os campos elétricos e magnéticos sejam definidos como sendo gradientes dos potenciais elétrico e magnético:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad \mathbf{H} = -\nabla\varphi \quad (5.3)$$

Em que o operador ∇ é definido de acordo com a seguinte expressão:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (5.4)$$

Contudo, uma vez que uma nanoplaca é uma placa extremamente fina, serão desprezados os campos elétricos e magnéticos segundo as direções x e y , isto é, $E_x = E_y = 0$ e $H_x = H_y = 0$. Assim sendo, foi necessário voltar a recorrer ao princípio de Hamilton para a obtenção das equações de movimento em função dos esforços:

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \delta U + \delta V - \delta K \, dt \quad (5.5)$$

sendo os diversos parâmetros definidos de acordo com as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \delta U = \int_A \int_{-h/2}^{h/2} & \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy} - D_z \delta E_z \\ & - B_z \delta H_z \, dz dx dy = \\ = \int_A & \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} \delta u - \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} \delta w + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} \delta v - \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} \delta w + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \delta u \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \delta v - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \delta w - \frac{\partial D_z}{\partial z} \delta \phi - \frac{\partial B_z}{\partial z} \delta \varphi \, dx dy \\ K = \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} & \rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \right)^2 + \rho \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} \right)^2 + \rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} \right)^2 \, dz dx dy \\ \delta K = \int_A \int_{-h/2}^{h/2} & \rho \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \delta v}{\partial t} + \rho \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} - \rho z \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial t} \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} & - \rho z \frac{\partial \delta u}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - \rho z \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y \partial t} - \rho z \frac{\partial \delta v}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \\ & + \rho z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial t} + \rho z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y \partial t} \, dz dx dy. \end{aligned}$$

$$\delta V = \int_A q \delta w \, dx dy \quad (5.8)$$

em que a variável q representa uma força por unidade de área, relacionada com os coeficientes do meio de Pasternak e com as forças elétricas e magnéticas que podem existir segundo as direções x e y , sendo definida posteriormente.

Assim sendo, fazendo uso do princípio de Hamilton, obteve-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
 0 = \int_{t_1}^{t_2} \int_A & \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} \delta u - \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} \delta w + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} \delta v - \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} \delta w + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \delta u \\
 & + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \delta v - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \delta w - \frac{\partial D_z}{\partial z} \delta \phi - \frac{\partial B_z}{\partial z} \delta \varphi + q \delta w \quad (5.9) \\
 & - \rho h \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} - \rho h \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \delta v}{\partial t} - \rho h \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} dx dy dt
 \end{aligned}$$

pelo que agrupando os termos em relação a cada deslocamento virtual (δu , δv , δw , $\delta \phi$ e $\delta \varphi$), são obtidas as equações de movimento em função dos esforços:

$$\begin{aligned}
 \delta u : \quad & \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
 \delta v : \quad & \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\
 \delta w : \quad & -\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + q = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (5.10) \\
 \delta \phi : \quad & \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0 \\
 \delta \varphi : \quad & \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0
 \end{aligned}$$

5.1. Definição dos esforços

Tal como foi referido anteriormente, uma vez que estamos perante relações constitutivas diferentes das mencionados nos capítulos anteriores, foi necessário também redefinir os esforços. No entanto, para que tal seja possível, é necessário conhecer as expressões que definem as variáveis parciais referentes aos potenciais elétrico e magnético ($\partial \phi / \partial z$ e $\partial \varphi / \partial z$). Assim sendo, recorreu-se às equações (5.2) e (5.10) para a obtenção das expressões necessárias:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial z} (e_{31} \varepsilon_{xx} + e_{31} \varepsilon_{yy} - h_{33} E_z - g_{33} H_z) &= 0 \\
 \frac{\partial}{\partial z} (f_{31} \varepsilon_{xx} + f_{31} \varepsilon_{yy} - g_{33} E_z - \mu_{33} H_z) &= 0
 \end{aligned} \quad (5.11)$$

que após manipulações matemáticas assumem a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} e_{31}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) - h_{33} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - g_{33} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} f_{31}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) - g_{33} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \mu_{33} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= 0\end{aligned}\quad (5.12)$$

Assim sendo, fazendo uso da regra de Cramer [74], as derivadas parciais de segunda ordem dos potenciais elétrico e magnético são definidas de acordo com as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} &= M_1 \Delta \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= M_2 \Delta\end{aligned}\quad (5.13)$$

em que os diferentes coeficientes são definidos em seguida:

$$\begin{aligned}M_1 &= \frac{\mu_{33} e_{31} - g_{33} f_{31}}{h_{33} \mu_{33} - g_{33}^2} \\ M_1 &= \frac{h_{33} f_{31} - g_{33} e_{31}}{h_{33} \mu_{33} - g_{33}^2} \\ \Delta &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\end{aligned}\quad (5.14)$$

Deste modo, recorrendo a um processo de integração e tendo em conta as condições de fronteira definidas em (5.1), foi possível obter as derivadas parciais de primeira ordem dos potenciais elétrico e magnético:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial z} &= M_1 z \Delta + \frac{V_0}{h} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= M_2 z \Delta + \frac{\Omega_0}{h}\end{aligned}\quad (5.15)$$

Em seguida segue-se a definição dos esforços que sofrem alterações com a introdução das propriedades magneto-elétricas, assim como das manipulações matemáticas realizadas para que fosse possível obter as suas expressões finais, tendo sido feito uso das expressões (3.1), (5.2) e (5.15):

$$\begin{aligned}M_{xx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E}{1 - \nu^2} z \left(\frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{E \nu}{1 - \nu^2} z \left(\frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ &\quad - e_{31} z \left(M_1 z \Delta + \frac{V_0}{h} \right) - f_{31} z \left(M_2 z \Delta + \frac{\Omega_0}{h} \right) dz\end{aligned}\quad (5.16)$$

$$M_{yy} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2} z \left(\frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{E\nu}{1-\nu^2} z \left(\frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - e_{31} z \left(M_1 z \Delta + \frac{V_0}{h} \right) - f_{31} z \left(M_2 z \Delta + \frac{\Omega_0}{h} \right) dz$$

Sendo que após a resolução do integral, as expressões os esforços assumem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} M_{xx} &= -\frac{E}{1-\nu^2} \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{E\nu}{1-\nu^2} \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + e_{31} \frac{h^3}{12} M_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ &\quad + e_{31} \frac{h^3}{12} M_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + f_{31} \frac{h^3}{12} M_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f_{31} \frac{h^3}{12} M_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ M_{yy} &= -\frac{E}{1-\nu^2} \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{E\nu}{1-\nu^2} \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + e_{31} \frac{h^3}{12} M_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ &\quad + e_{31} \frac{h^3}{12} M_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + f_{31} \frac{h^3}{12} M_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f_{31} \frac{h^3}{12} M_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (5.17)$$

Assim sendo, as expressões finais que definem os esforços são as seguintes:

$$\begin{aligned} M_{xx} &= -\left(\frac{E}{1-\nu^2} - e_{31} M_1 - f_{31} M_2 \right) \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ &\quad - \left(\frac{E\nu}{1-\nu^2} - e_{31} M_1 - f_{31} M_2 \right) \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ M_{yy} &= -\left(\frac{E}{1-\nu^2} - e_{31} M_1 - f_{31} M_2 \right) \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ &\quad - \left(\frac{E\nu}{1-\nu^2} - e_{31} M_1 - f_{31} M_2 \right) \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (5.18)$$

De referir que as expressões dos esforços N_{xx} e N_{yy} também sofrem alterações, encontrando-se estes esforços definidos no Anexo F, uma vez que, após a posterior aplicação do método de Galerkin, as alterações que as expressões sofrem não exercem influência no modelo final.

5.2. Equações de movimento

As equações de movimento em função dos deslocamentos foram definidas com recurso às equações (5.10) e (5.13), sendo que se considerou que os restantes esforços (N_{xx} , N_{yy} , N_{xy} e M_{xy}) seriam definidos de acordo com as equações (3.10) e (3.11), e não de acordo com o Anexo F, uma vez que as alterações sofridas pelas expressões não exercem influência após a aplicação do método de Galerkin.

Quanto à variável q , esta é definida de acordo com a seguinte expressão:

$$q = k_w w - k_g \nabla^2 w - (N_{xe} + N_{xa}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (N_{ye} + N_{ya}) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (5.19)$$

em que k_w e k_g são as constantes do meio elástico e os restantes coeficientes são as forças elétricas e magnéticas segundo as direções x e y , definidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} N_{xe} &= N_{ye} = e_{31} V_0 \\ N_{xa} &= N_{ya} = f_{31} \Omega_0 \end{aligned} \quad (5.20)$$

Assim sendo, foi possível definir as equações de movimento em função dos deslocamentos:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(Gh \frac{\partial u}{\partial y} + Gh \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &= \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho h \mu \nabla^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\nu Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(Gh \frac{\partial u}{\partial y} + Gh \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &= \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \rho h \mu \nabla^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ & \left(D - \frac{h^3}{12} e_{31} M_1 - \frac{h^3}{12} f_{31} M_2 \right) \nabla^4 w \\ &+ (1 - \mu \nabla^2) \left[k_w w - k_g \nabla^2 w - (N_{xe} + N_{xa}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (N_{ye} + N_{ya}) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = \\ & \rho h \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} - \rho h \mu \nabla^2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (5.21)$$

5.3. Aplicação do método de Galerkin

Uma vez que o número de deslocamentos do modelo formulado é idêntico ao do modelo referente às nanoplacas simples, os deslocamentos foram definidos de acordo com as expressões (3.14).

No entanto, uma vez que estamos na presença de uma equação de movimento diferente do modelo criado para as nanoplacas simples (equação de movimento referente ao deslocamento w), foi necessário voltar a definir o seu operador $\mathcal{L}_w(w(x, y, t))$. De referir que não serão definidos os restantes operadores, uma vez que as suas expressões são idênticas às (3.16).

$$\mathcal{L}_w(w(x, y, t)) = \left(D - \frac{h^3}{12} e_{31} M_1 - \frac{h^3}{12} f_{31} M_2 \right) \nabla^4 w \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned}
& + (1 - \mu \nabla^2) \left[k_w w - k_g \nabla^2 w - (N_{xe} + N_{xa}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (N_{ye} + N_{ya}) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\
& - \rho h \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} - \rho h \mu \nabla^2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2}
\end{aligned}$$

em que o parâmetro ∇^4 é definido do seguinte modo:

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (5.23)$$

A definição de um modelo para nanoplacas magneto-electro-elásticas passa pela formulação das matrizes de massa e de rigidez da nanoplaca, de modo a ser possível obter as frequências e formas naturais de vibração. Dado que as equações de movimento referentes aos deslocamentos u e v não sofrem alterações, apenas foi necessário definir as matrizes referentes à flexão da nanoplaca:

$$\int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} f_i(x) f_j(y) \mathcal{L}_w(w(x, y, t)) \, dx dy \quad (5.24)$$

tendo sido necessário realizar a transformação para variáveis adimensionais (ξ, η) , tal como foi realizado nos capítulos anteriores:

$$\frac{a}{2} \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_i(\xi) f_j(\eta) \mathcal{L}_w(w(\xi, \eta, t)) \, d\xi d\eta \quad (5.25)$$

As variáveis auxiliares utilizadas na definição das próximas expressões são idênticas às definidas em (3.20).

Assim sendo, foi possível definir a componente da matriz de rigidez referente ao deslocamento w , uma vez que se optou pela sua divisão em três subcomponentes distintas (material, meio elástico e forças magneto-elétricas):

$$\begin{aligned}
& K_{ww}^{material}[i, j] = \\
& \frac{8}{a^3} \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_\alpha(\xi) f_\beta(\eta) \left(D - \frac{h^3}{12} e_{31} M_1 - \frac{h^3}{12} f_{31} M_2 \right) \frac{\partial^4 (f_\theta(\xi) f_\zeta(\eta))}{\partial \xi^4} \, d\xi d\eta \\
& + \frac{2}{a} \frac{2}{b} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_\alpha(\xi) f_\beta(\eta) 2 \left(D - \frac{h^3}{12} e_{31} M_1 - \frac{h^3}{12} f_{31} M_2 \right) \frac{\partial^4 (f_\theta(\xi) f_\zeta(\eta))}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} \, d\xi d\eta \\
& + \frac{a}{2} \frac{8}{b^3} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_\alpha(\xi) f_\beta(\eta) \left(D - \frac{h^3}{12} e_{31} M_1 - \frac{h^3}{12} f_{31} M_2 \right) \frac{\partial^4 (f_\theta(\xi) f_\zeta(\eta))}{\partial \eta^4} \, d\xi d\eta
\end{aligned} \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned}
K_{ww}^{meio}[i,j] = & \frac{a}{2} \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_{\alpha}(\xi) f_{\beta}(\eta) k_w f_{\theta}(\xi) f_{\zeta}(\eta) d\xi d\eta \\
& - \frac{2}{a} \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_{\alpha}(\xi) f_{\beta}(\eta) k_w \mu \frac{\partial^2 (f_{\theta}(\xi) f_{\zeta}(\eta))}{\partial \xi^2} d\xi d\eta \\
& - \frac{a}{2} \frac{2}{b} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_{\alpha}(\xi) f_{\beta}(\eta) k_w \mu \frac{\partial^2 (f_{\theta}(\xi) f_{\zeta}(\eta))}{\partial \eta^2} d\xi d\eta \\
& - \frac{2}{a} \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_{\alpha}(\xi) f_{\beta}(\eta) k_g \frac{\partial^2 (f_{\theta}(\xi) f_{\zeta}(\eta))}{\partial \xi^2} d\xi d\eta \\
& - \frac{a}{2} \frac{2}{b} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_{\alpha}(\xi) f_{\beta}(\eta) k_g \frac{\partial^2 (f_{\theta}(\xi) f_{\zeta}(\eta))}{\partial \eta^2} d\xi d\eta \\
& + \frac{8}{a^3} \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_{\alpha}(\xi) f_{\beta}(\eta) k_g \mu \frac{\partial^4 (f_{\theta}(\xi) f_{\zeta}(\eta))}{\partial \xi^4} d\xi d\eta \\
& + \frac{2}{a} \frac{2}{b} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_{\alpha}(\xi) f_{\beta}(\eta) 2k_g \mu \frac{\partial^4 (f_{\theta}(\xi) f_{\zeta}(\eta))}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} d\xi d\eta \\
& + \frac{a}{2} \frac{8}{b^3} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_{\alpha}(\xi) f_{\beta}(\eta) k_g \mu \frac{\partial^4 (f_{\theta}(\xi) f_{\zeta}(\eta))}{\partial \eta^4} d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{5.27}$$

$$\begin{aligned}
K_{ww}^{forças}[i,j] = & - \frac{2}{a} \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_{\alpha}(\xi) f_{\beta}(\eta) (N_{xe} + N_{xa}) \frac{\partial^2 (f_{\theta}(\xi) f_{\zeta}(\eta))}{\partial \xi^2} d\xi d\eta \\
& + \frac{8}{a^3} \frac{b}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_{\alpha}(\xi) f_{\beta}(\eta) (N_{xe} + N_{xa}) \mu \frac{\partial^4 (f_{\theta}(\xi) f_{\zeta}(\eta))}{\partial \xi^4} d\xi d\eta \\
& + \frac{2}{a} \frac{2}{b} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_{\alpha}(\xi) f_{\beta}(\eta) (N_{xe} + N_{xa}) \mu \frac{\partial^4 (f_{\theta}(\xi) f_{\zeta}(\eta))}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} d\xi d\eta \\
& - \frac{a}{2} \frac{2}{b} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_{\alpha}(\xi) f_{\beta}(\eta) (N_{ye} + N_{ya}) \frac{\partial^2 (f_{\theta}(\xi) f_{\zeta}(\eta))}{\partial \eta^2} d\xi d\eta \\
& + \frac{2}{a} \frac{2}{b} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_{\alpha}(\xi) f_{\beta}(\eta) (N_{ye} + N_{ya}) \mu \frac{\partial^4 (f_{\theta}(\xi) f_{\zeta}(\eta))}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} d\xi d\eta \\
& + \frac{a}{2} \frac{8}{b^3} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_{\alpha}(\xi) f_{\beta}(\eta) (N_{ye} + N_{ya}) \mu \frac{\partial^4 (f_{\theta}(\xi) f_{\zeta}(\eta))}{\partial \eta^4} d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Assim sendo, após a utilização do método de integração por partes para simplificar as derivadas parciais de ordem mais elevada, foi possível obter as expressões simplificadas das diferentes subcomponentes da matriz de rigidez à flexão, encontrando-se definidas no Anexo G.

Deste modo, a componente da matriz de rigidez referente ao deslocamento w é definida de acordo com a seguinte expressão:

$$K_{ww}[i,j] = K_{ww}^{material}[i,j] + K_{ww}^{meio}[i,j] + K_{ww}^{forças}[i,j] \quad (5.29)$$

Quanto às expressões que definem as diferentes componentes da matriz de massa, estas são idênticas às expressões (3.27) definidas no capítulo referente às nanoplacas simples. Deste modo, foi possível definir a forma matricial das equações de movimento:

$$\begin{bmatrix} M_{uu} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M_{vv} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & M_{ww} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_u(t) \\ \ddot{q}_v(t) \\ \ddot{q}_w(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{uv} & \mathbf{0} \\ K_{vu} & K_{vv} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & K_{ww} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_u(t) \\ q_v(t) \\ q_w(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (5.30)$$

5.4. Estudo de convergência

Tal como aconteceu para os modelos prévios, foi realizado um estudo de convergência com a intenção de conhecer o número de funções a partir do qual os resultados estabilizam.

Deste modo, foram obtidos resultados para a primeira, segunda e quarta frequência natural, tendo sido utilizadas desde 4 até 11 funções de forma, sendo que a razão pela qual não se obteve para a terceira frequência natural foi previamente enunciada no capítulo referente às nanoplacas simples. Assim sendo, são apresentados em seguida os valores utilizados para definir os parâmetros relativos à geometria e material da nanoplaca [76]:

$$a = b = 10 \text{ nm}$$

$$h = 0,34 \text{ nm}$$

$$E = 155 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0,55$$

$$\rho = 5550 \text{ kg/m}^3 \quad (5.31)$$

$$e_{31} = -2,2 \text{ C/m}^2$$

$$f_{31} = 290,2 \text{ N/Am}$$

$$h_{33} = 6,35 \times 10^{-9} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$$

$$g_{33} = 2737,5 \times 10^{-12} \text{ N s/VC}$$

$$\mu_{33} = 83,5 \times 10^{-6} \text{ N s}^2/\text{C}^2$$

De referir que os valores de E e ν foram definidos tendo em conta uma aproximação dos valores fornecidos por Li *et al.* [76], uma vez que este considera a nanoplaca como sendo ortotrópica.

A análise de convergência do modelo foi realizada tendo em consideração que os valores obtidos para as frequências naturais ao utilizar 11 funções de forma seriam os valores de

referência, tendo sido registada a diferença (em valor absoluto) entre esse valor e os restantes valores obtidos para um número inferior de funções de forma, tal como se pode observar nas tabelas 5.1 - 5.3. Uma vez que os valores da frequência se encontram em Hz, a relevância das diferenças por vezes podem ser de difícil visualização, tendo, por isso, se optado por também obter o erro relativo entre os valores, de modo a facilitar a compreensão da tabela.

De referir que o número elevado de algarismos significativos foi apenas utilizado de modo a permitir a perceção das diferenças existentes entre os vários valores obtidos.

Quanto às condições de fronteira, estas foram definidas como sendo simplesmente apoiadas em todos os lados de ambas as camadas da nanoplaca.

Assim sendo, verifica-se que a partir do uso de 8 funções de forma a variação existente deixa de ser significativa. No entanto, por motivos de maior precisão, serão usadas 11 funções de forma, uma vez que a variação no esforço computacional é insignificante.

Tabela 5.1 – Estudo da convergência da primeira frequência natural (Hz) de uma nanoplaca magneto-electro-elástica

n	ω_1^i	$ \omega_1^i - \omega_1^{i=11} $	Diferença relativa (%)
4	1.317.426.707,4008	185.985,80149	0,01412
5	1.317.240.802,7946	81,19534	0,00001
6	1.317.240.802,7944	81,19505	0,00001
7	1.317.240.721,6094	0,01008	0,00000
8	1.317.240.721,6094	0,01008	0,00000
9	1.317.240.721,5993	0,00000	0,00000
10	1.317.240.721,5993	0,00000	0,00000
11	1.317.240.721,5993	0,00000	0,00000

Tabela 5.2 – Estudo da convergência da segunda frequência natural (Hz) de uma nanoplaca magneto-electro-elástica

n	ω_2^i	$ \omega_2^i - \omega_2^{i=11} $	Diferença relativa (%)
4	3.102.056.126,961	8.758.175,11847	0,28313
5	3.102.006.787,721	8.708.835,87909	0,28154
6	3.093.334.509,338	36.557,49569	0,00118
7	3.093.334.489,484	36.537,64185	0,00118
8	3.093.297.999,986	48,14384	0,00000
9	3.093.297.999,986	48,14350	0,00000
10	3.093.297.951,842	0,00000	0,00000
11	3.093.297.951,842	0,00000	0,00000

Tabela 5.3 – Estudo da convergência da quarta frequência natural (Hz) de uma nanoplaca magneto-electro-elástica

n	ω_4^i	$ \omega_4^i - \omega_4^{i=11} $	Diferença relativa (%)
4	4.922.130.516,395	12.905.219,25442	0,26288
5	4.922.130.516,394	12.905.219,25354	0,26288
6	4.909.276.423,210	51.126,06954	0,00104
7	4.909.276.423,210	51.126,06954	0,00104
8	4.909.225.362,249	65,10831	0,00000
9	4.909.225.362,249	65,10831	0,00000
10	4.909.225.297,141	0,00000	0,00000
11	4.909.225.297,141	0,00000	0,00000

5.5. Validação do modelo

Uma vez que o modelo criado faz uso da teoria das placas finas (teoria de Kirchhoff), não foi possível comparar os resultados obtidos com uma grande parte dos valores existentes na literatura, visto que estes utilizam valores próximos da unidade para a razão entre a espessura e o comprimento da placa.

Deste modo, a validação do modelo foi realizada através da comparação de diferentes gráficos com os do artigo [74], gráficos estes que retratam o comportamento das frequências naturais face à variação de diversos parâmetros.

De referir que se recorreu à adimensionalização das frequências naturais, tendo sido utilizada a seguinte expressão para tal efeito:

$$\bar{\omega} = \frac{\omega a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E/1 - \nu^2}} \quad (5.32)$$

Foi necessário também definir as seguintes razões geométricas, para que a validação do modelo fosse possível:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{h}{a} \\ \eta &= \frac{a}{b} \end{aligned} \quad (5.33)$$

De referir que a razão geométrica η em nada está relacionada com a coordenada adimensional utilizada na secção referente à aplicação do método de Galerkin.

Os valores dos parâmetros relativos ao material da placa são idênticos aos utilizados no estudo da convergência, sendo que os valores dos parâmetros referentes à geometria da placa são definidos para cada caso comparativo, uma vez que variam ao longo da validação do modelo.

Assim sendo, foi inicialmente analisada a variação da primeira frequência natural adimensionalizada face à variação da espessura e tendo em conta diferentes valores de δ e de V_0 , tal como se pode observar pelas figuras 5.2 e 5.3, sendo que a figura 5.3 foi retirada do artigo de Li e Zhang [74].

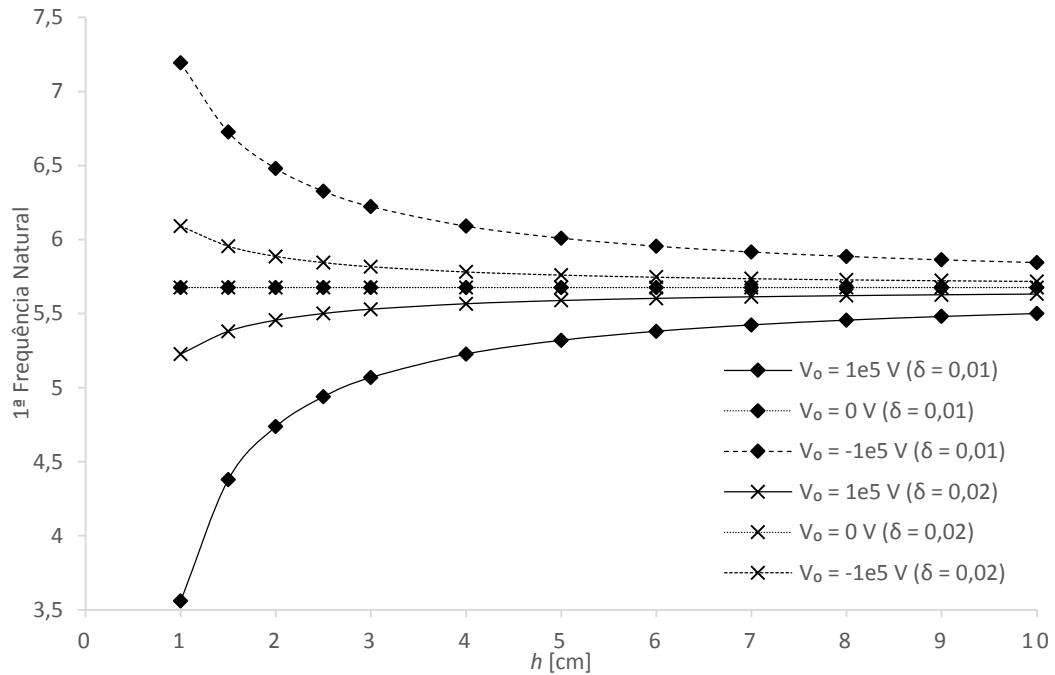


Figura 5.2 – Variação da primeira frequência natural adimensionalizada com o aumento da espessura, para diferentes valores de V_0

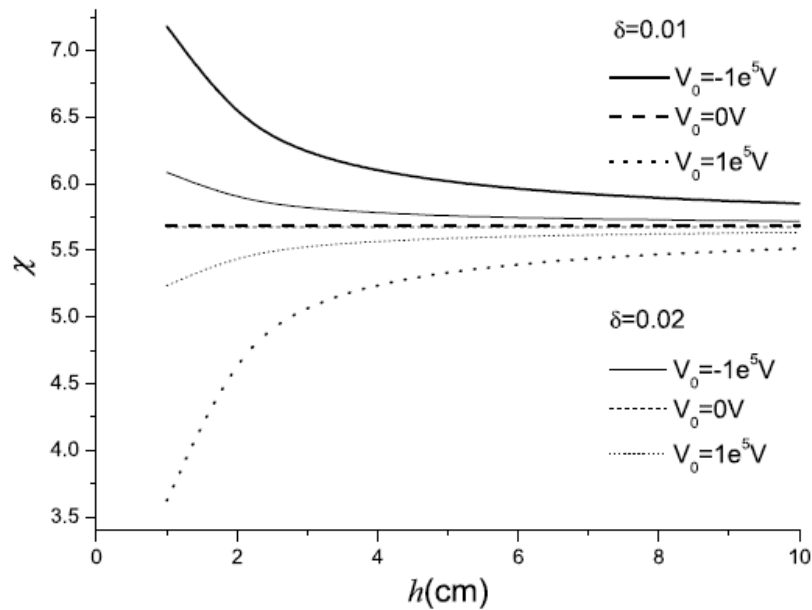


Figura 5.3 – Variação da primeira frequência natural adimensionalizada com o aumento da espessura, para diferentes valores de V_0 (retirada de [74])

Através da análise das duas figuras, é possível verificar que existe bastante semelhança entre ambas, tanto na variação da frequência face ao aumento da espessura, como nos valores da frequência natural adimensionalizada.

As figuras 5.4 e 5.5 dizem respeito à variação da primeira frequência natural adimensionalizada face à variação da razão $1/\delta$, tendo em conta diferentes valores da espessura e de V_0 , sendo que a figura 5.5 é referente ao artigo de Li e Zhang [74].

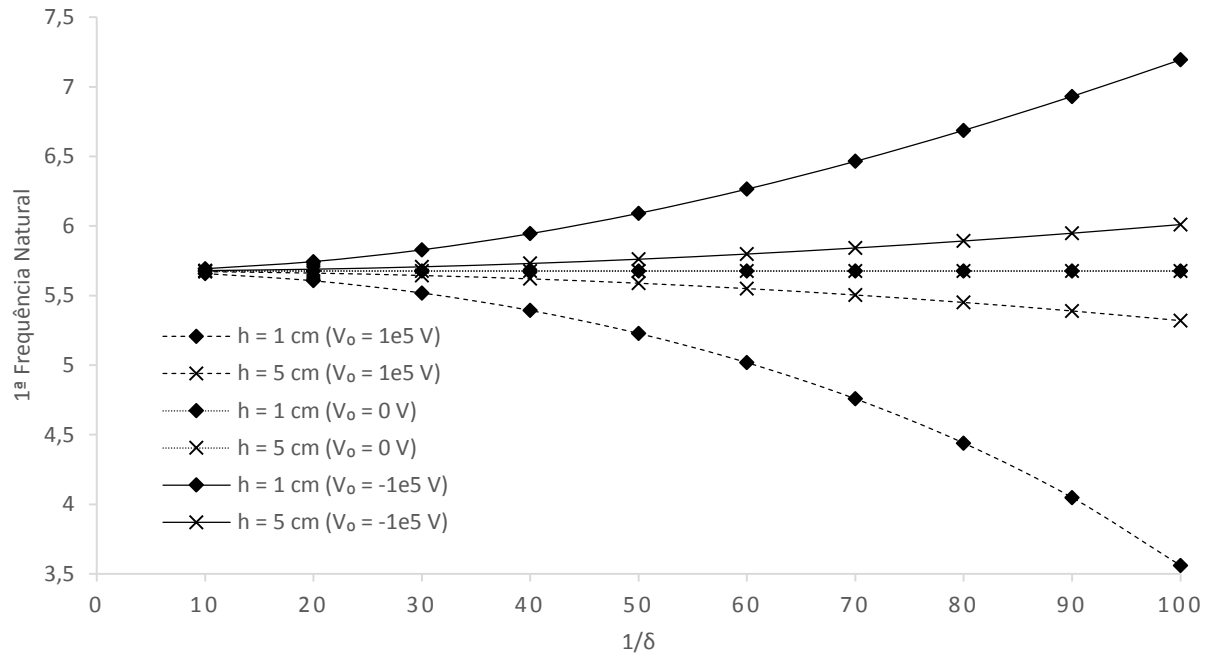


Figura 5.4 – Variação da primeira frequência natural adimensionalizada com o aumento da razão $1/\delta$, para diferentes valores de V_0

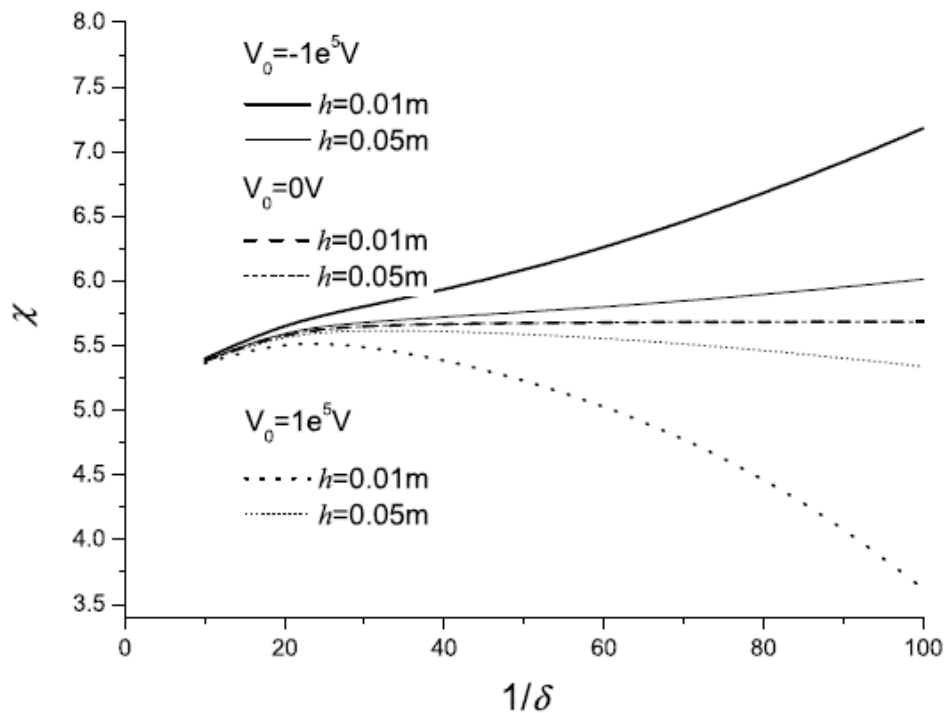


Figura 5.5 – Variação da primeira frequência natural adimensionalizada com o aumento da razão $1/\delta$, para diferentes valores de V_0 (retirada de [74])

É possível verificar que existe uma ligeira diferença no comportamento das diferentes curvas para os menores valores da razão $1/\delta$, a qual resulta de a se ter utilizado a teoria das placas finas, em contraste com a teoria de deformação de corte de primeira ordem utilizada na referência [74]. Deste modo, e analisando o comportamento geral das diferentes curvas das

figuras 5.4 e 5.5, é possível afirmar que modelo é capaz de obter resultados satisfatórios para a primeira frequência natural, sendo estes resultados mais precisos quanto maior for a razão geométrica $1/\delta$ (ou quanto menor for a razão entre a espessura e o comprimento da placa, δ).

O comportamento da primeira frequência natural adimensionalizada face à variação da forma da placa, ou seja, face à variação da razão $1/\eta$, é ilustrado pelas figuras 5.6 e 5.7, em que a figura 5.7 é da referência [74].

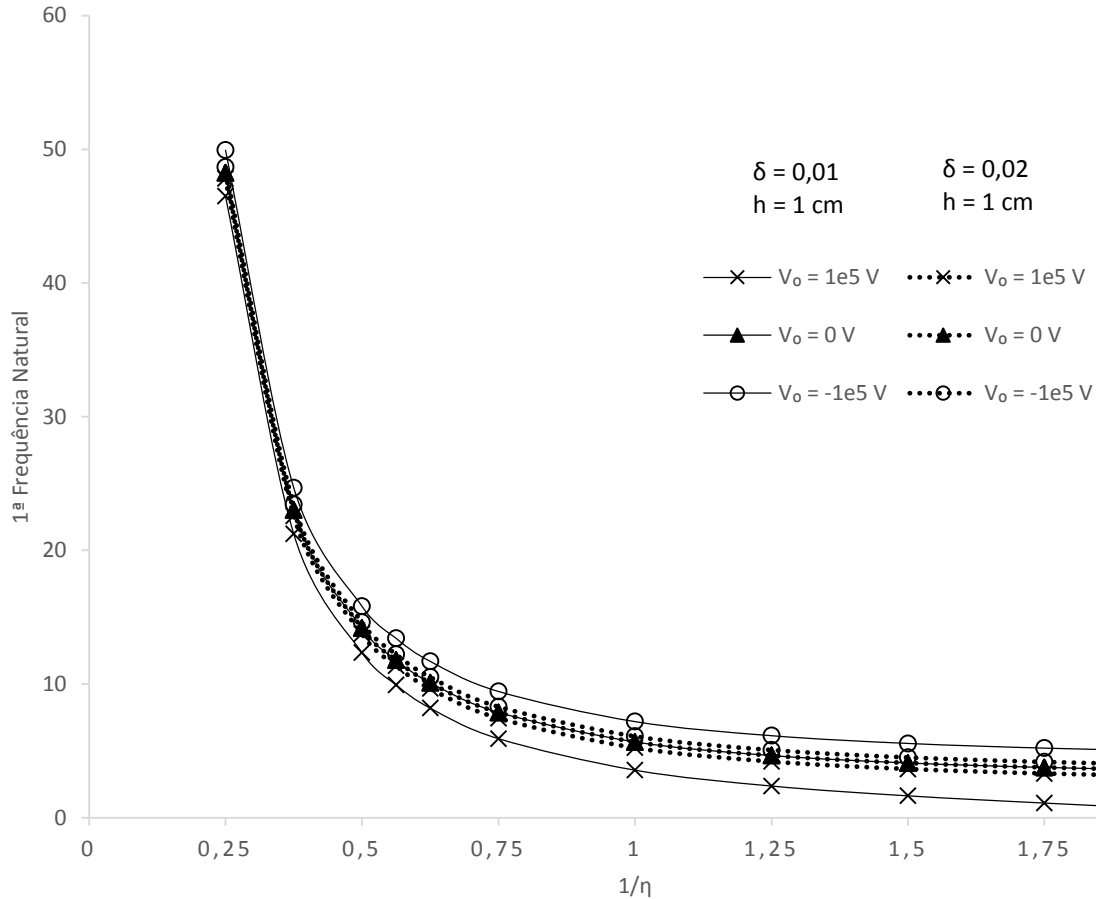


Figura 5.6 – Variação da primeira frequência natural adimensionalizada com o aumento da razão $1/\eta$, para diferentes valores de V_0

Verifica-se novamente que, apesar de o comportamento da primeira frequência natural ser semelhante ao evidenciado no artigo [74], o modelo criado apresenta certas limitações relacionadas com o facto de ter sido utilizada a teoria das placas finas, neste caso apresentando valores inferiores da frequência natural quando a razão geométrica $1/\eta$ tende para valores próximos do nulo. No entanto, é possível afirmar que, para valores da razão $1/\eta$ superiores a 0,5, o modelo reproduz um comportamento da primeira frequência natural idêntico ao que se encontra no artigo.

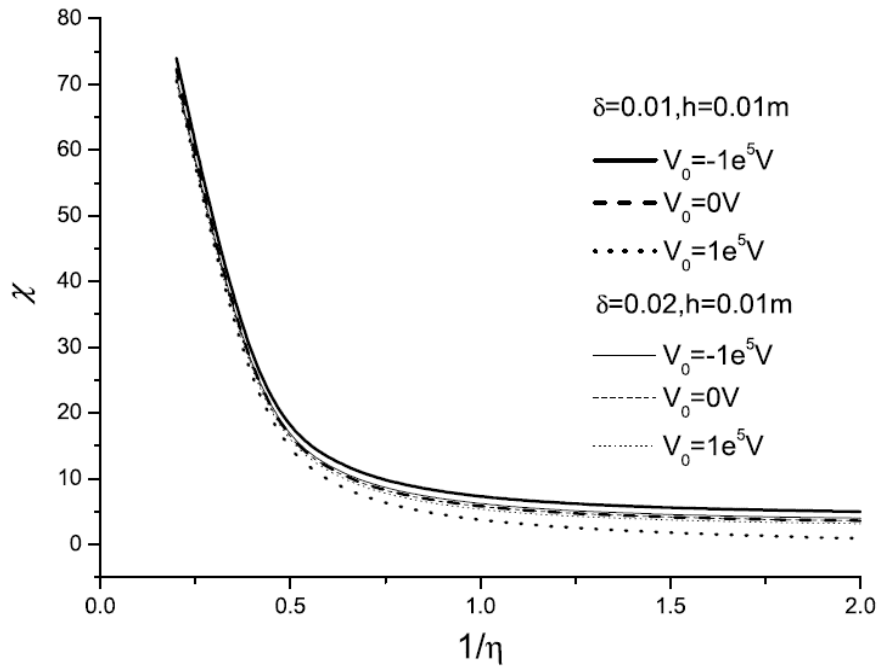


Figura 5.7 – Variação da primeira frequência natural adimensionalizada com o aumento da razão $1/\eta$, para diferentes valores de V_0 (retirada de [74])

Tendo sido analisada a variação da primeira frequência natural para diferentes valores de V_0 , foi analisado o seu comportamento tendo em conta diferentes valores de Ω_0 . As figuras 5.8 e 5.9 ilustram esse comportamento face à variação da espessura e tendo em conta diferentes valores de δ e de Ω_0 , tendo sido a figura 5.9 retirado do artigo de Li e Zhang [74].

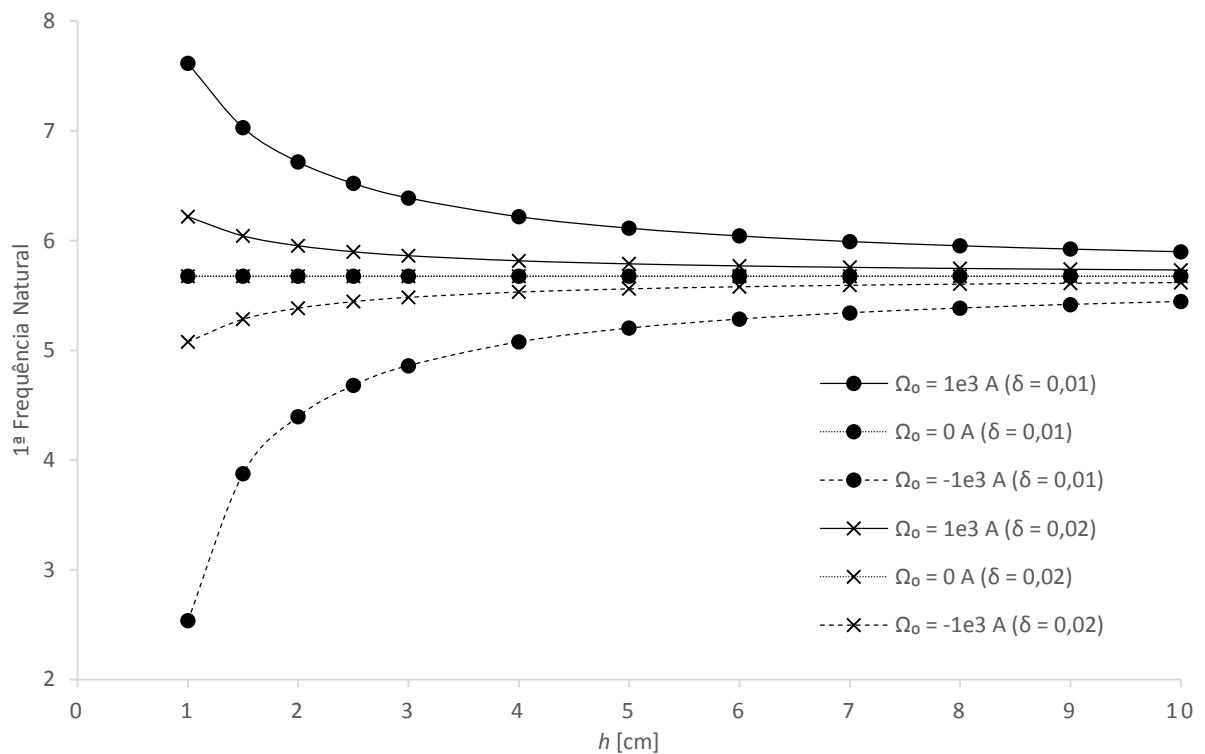


Figura 5.8 – Variação da primeira frequência natural adimensionalizada com o aumento da espessura, para diferentes valores de Ω_0

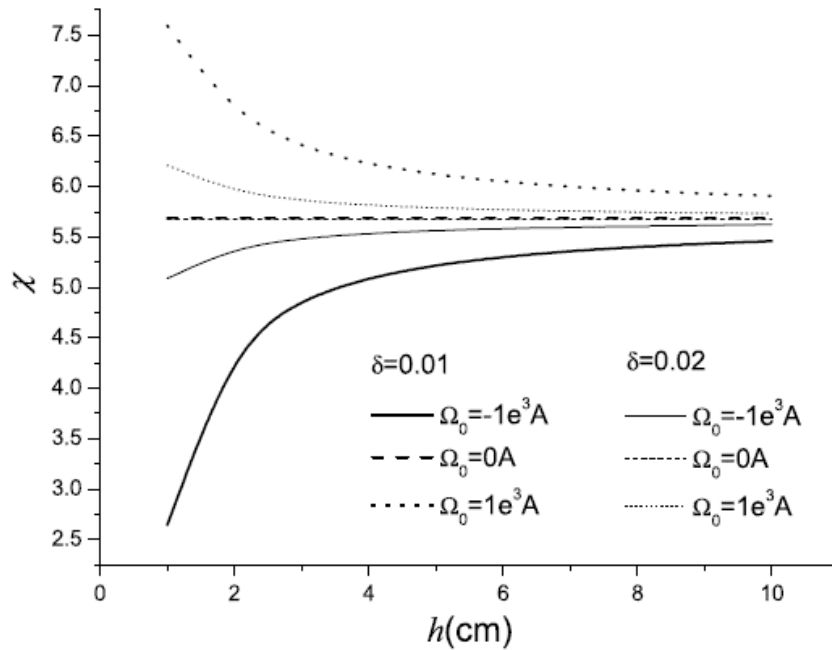


Figura 5.9 – Variação da primeira frequência natural adimensionalizada com o aumento da espessura, para diferentes valores de Ω_0 (retirada de [74])

Deste modo, foi possível verificar que existe uma enorme semelhança entre o comportamento obtido pelo modelo e o ilustrado no artigo, não existindo diferenças relativas aos diferentes modelos utilizados, uma vez que são consideradas placas finas (baixo valor da razão δ).

A última comparação realizada é focada na variação da primeira frequência natural adimensionalizada face a um aumento da razão geométrica δ , tendo em conta diferentes valores da espessura e de Ω_0 , encontrando-se as variações referentes ao modelo desta dissertação e ao artigo ilustradas nas figuras 5.10 e 5.11, respetivamente.

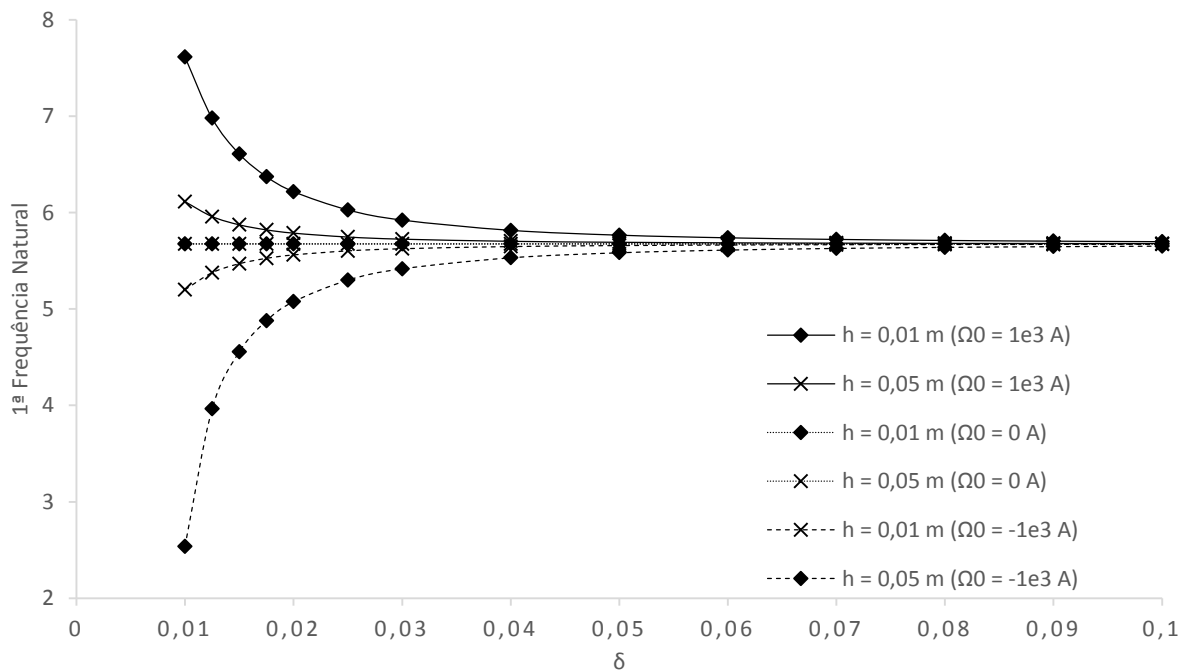


Figura 5.10 – Variação da primeira frequência natural adimensionalizada com o aumento da razão δ , para diferentes valores de Ω_0

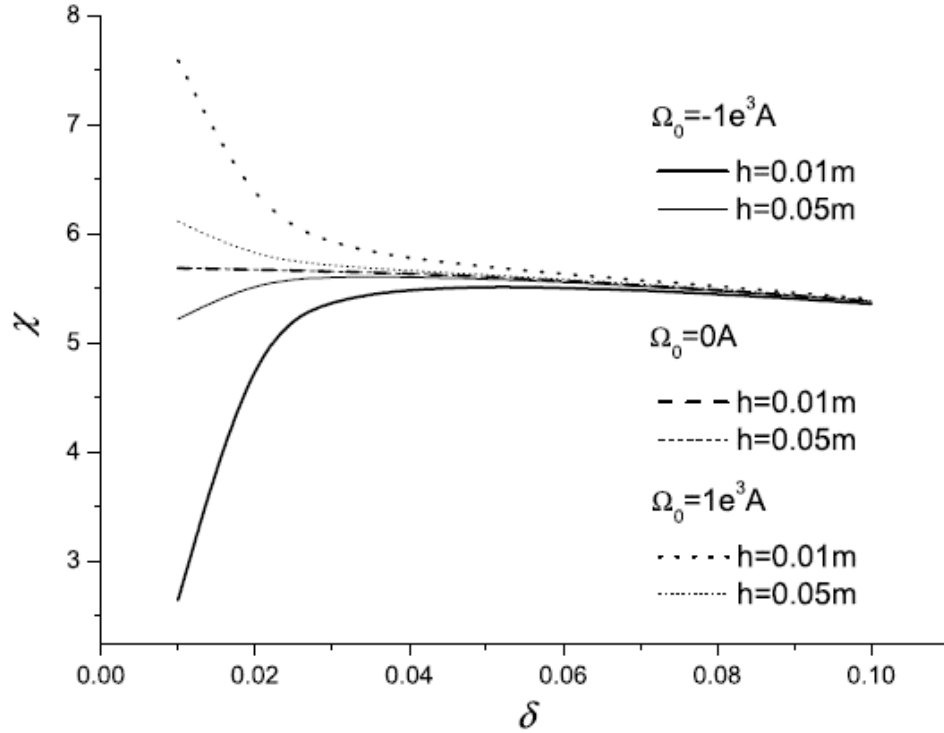


Figura 5.11 – Variação da primeira frequência natural adimensionalizada com o aumento da razão δ , para diferentes valores de Ω_0 (retirada de [74])

De igual modo ao que se sucedeu em comparações anteriores, quando o valor da razão δ tende para valores mais elevados, a diferença entre ambas as variações da frequência natural vai aumentando, devido ao facto de na referência [74] se utilizar uma teoria de deformação de corte de primeira ordem, em contraste com a teoria de placas finas utilizada para formular o presente modelo.

Assim sendo, uma vez que as diferentes comparações referentes ao comportamento da primeira frequência natural foram bem-sucedidas, é possível afirmar que o modelo tem a capacidade de obter os valores das várias frequências naturais de uma nanoplaca magneto-electro-elástica, salvaguardando os casos em que as dimensões da nanoplaca não são compatíveis com a teoria de Kirchhoff.

5.6. Análise dos resultados

O estudo do comportamento de uma nanoplaca magneto-electro-elástica consoante a variação de fatores como o comprimento e o parâmetro não-local foi realizado tendo em conta os valores dos parâmetros referentes à geometria e ao material definidos em (5.31). No entanto, antes de ser estudada a influência das dimensões e do parâmetro não-local nas frequências naturais da nanoplaca, será realizada uma análise aos diferentes gráficos ilustrados na secção anterior.

De acordo com as figuras 5.2 - 5.7, é possível afirmar que a existência de um potencial elétrico V_0 positivo na superfície superior da nanoplaca origina menores valores das frequências naturais, sendo maior a sua influência quanto menor a espessura da nanoplaca. Caso a nanoplaca esteja sujeita a um potencial elétrico negativo, as suas frequências naturais serão superiores às frequências naturais de uma nanoplaca sujeita a um potencial elétrico nulo (ou positivo).

Por outro lado, através da análise das figuras 5.8 - 5.11, pode-se concluir que a existência de um potencial magnético Ω_0 positivo na superfície superior da nanoplaca origina valores superiores das frequências naturais, sendo que um potencial magnético negativo causa uma descida das frequências naturais face ao seu valor para um potencial magnético nulo (ou positivo). Assim sendo, foram definidos três casos em que se iria estudar a influência de diferentes parâmetros nas frequências naturais de uma nanoplaca magneto-electro-elástica:

- Caso 1: Potencial elétrico e magnético nulo, para que fosse possível ter um “grupo de controlo”, de modo a comparar a variação das frequências naturais com os outros casos;
- Caso 2: Potencial elétrico positivo e potencial magnético negativo, que causaria os menores valores das frequências naturais;
- Caso 3: Potencial elétrico negativo e potencial magnético positivo, que originaria valores mais elevados das frequências naturais.

Os valores dos potenciais elétricos e magnéticos foram retirados da referência [76], tendo sido considerados o menor e o maior valor para ambos os potenciais:

$$\begin{aligned} V_0 &= \pm 5 \times 10^{-4} \text{ V} \\ \Omega_0 &= \pm 5 \times 10^{-6} \text{ A} \end{aligned} \quad (5.34)$$

5.6.1. Influência das dimensões da nanoplaca nas frequências naturais

As figuras 5.12 e 5.13 traduzem a variação da primeira frequência natural face a um aumento do comprimento da nanoplaca (sendo que a largura é sempre igual ao comprimento) para ambas as condições de fronteira consideradas. Foram obtidos resultados para os casos 2 e 3, uma vez que se tratam dos casos que potencialmente originariam os valores mais baixos e mais elevados das frequências naturais, respetivamente.

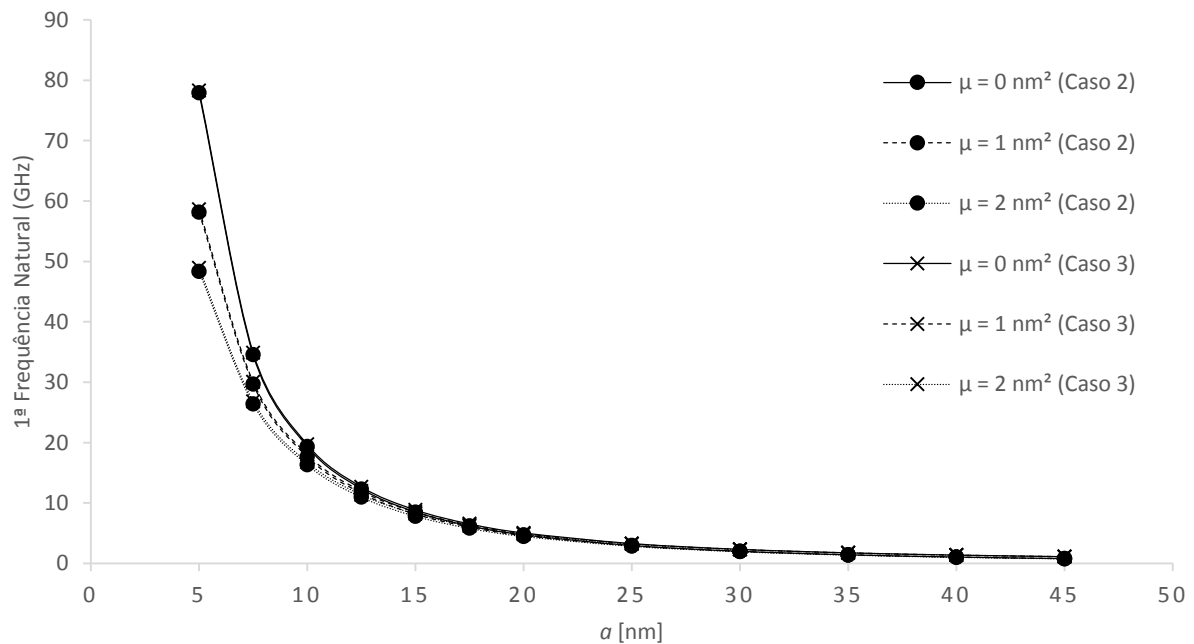


Figura 5.12 – Variação da primeira frequência natural para os dois casos em estudo, tendo em conta uma condição de apoio simples

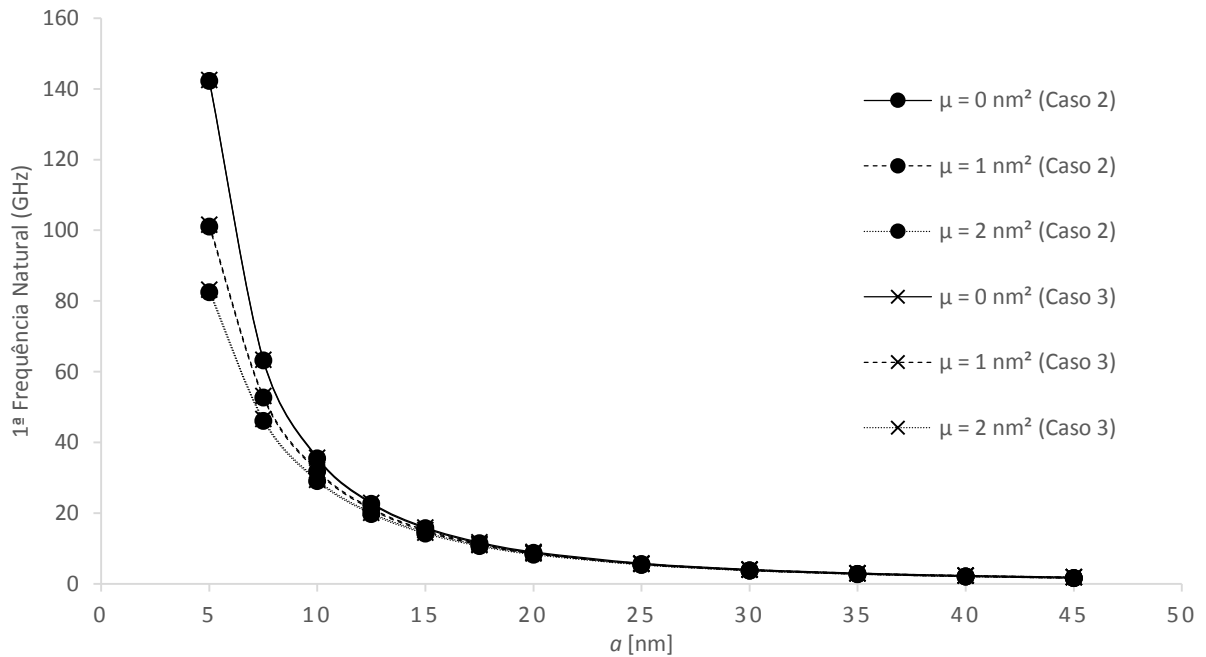


Figura 5.13 – Variação da primeira frequência natural com o aumento do comprimento para os dois casos em estudo, tendo em conta uma condição de encastramento

Através da análise das figuras 5.12 e 5.13, é possível observar que as frequências naturais de uma nanoplaca magneto-electro-elástica exibem um comportamento semelhante ao das nanoplacas consideradas nos capítulos anteriores, tanto devido ao aumento das suas dimensões como à diferença entre condições de fronteira.

Pode também ser concluído que, para potenciais elétricos e magnéticos da ordem de grandeza consideradas (10^{-4} V e 10^{-6} A , respetivamente), a geometria e as propriedades do material da nanoplaca são os fatores mais relevantes nas frequências naturais.

5.6.2. Influência do parâmetro não-local nas frequências naturais

Uma vez que não se verificaram diferenças visíveis entre os valores absolutos obtidos para ambos os casos nas figuras 5.12 e 5.13, optou-se por realizar uma análise para a frequência natural adimensionalizada, de modo a descartar os efeitos referentes à geometria e às propriedades do material, permitindo interpretar melhor a influência do parâmetro não-local e dos diferentes casos nas frequências naturais.

Assim sendo, as figuras 5.14 e 5.15 estabelecem a comparação entre o caso 1 (considerado o “caso de controlo”) e os casos 2 e 3, respetivamente. Considerou-se que as condições de fronteira seriam simplesmente apoiadas.

De referir que foram também realizadas as comparações para uma situação de encastramento, encontrando-se os seus gráficos no Anexo H, uma vez que exibem um comportamento semelhante aos gráficos que se seguem, sendo que a única diferença reside nos valores superiores da frequência natural originada pela condição de encastramento.

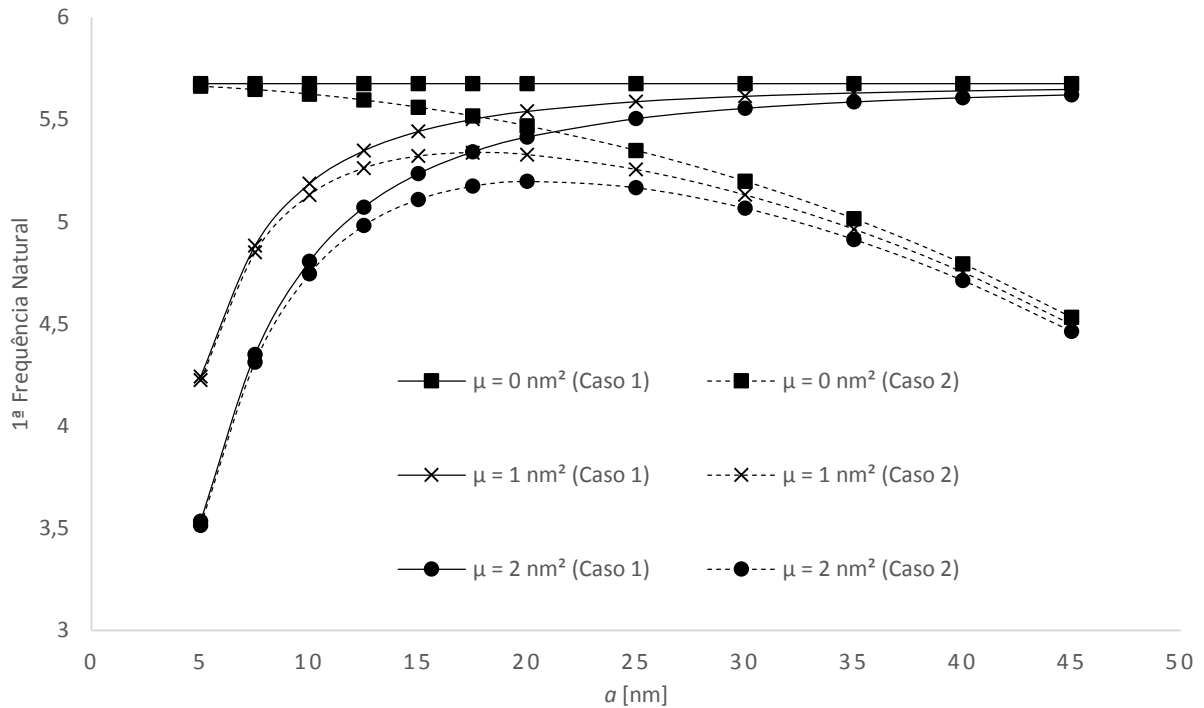


Figura 5.14 – Variação da primeira frequência natural adimensionalizada para os casos 1 e 2, tendo em conta diferentes valores do parâmetro não-local

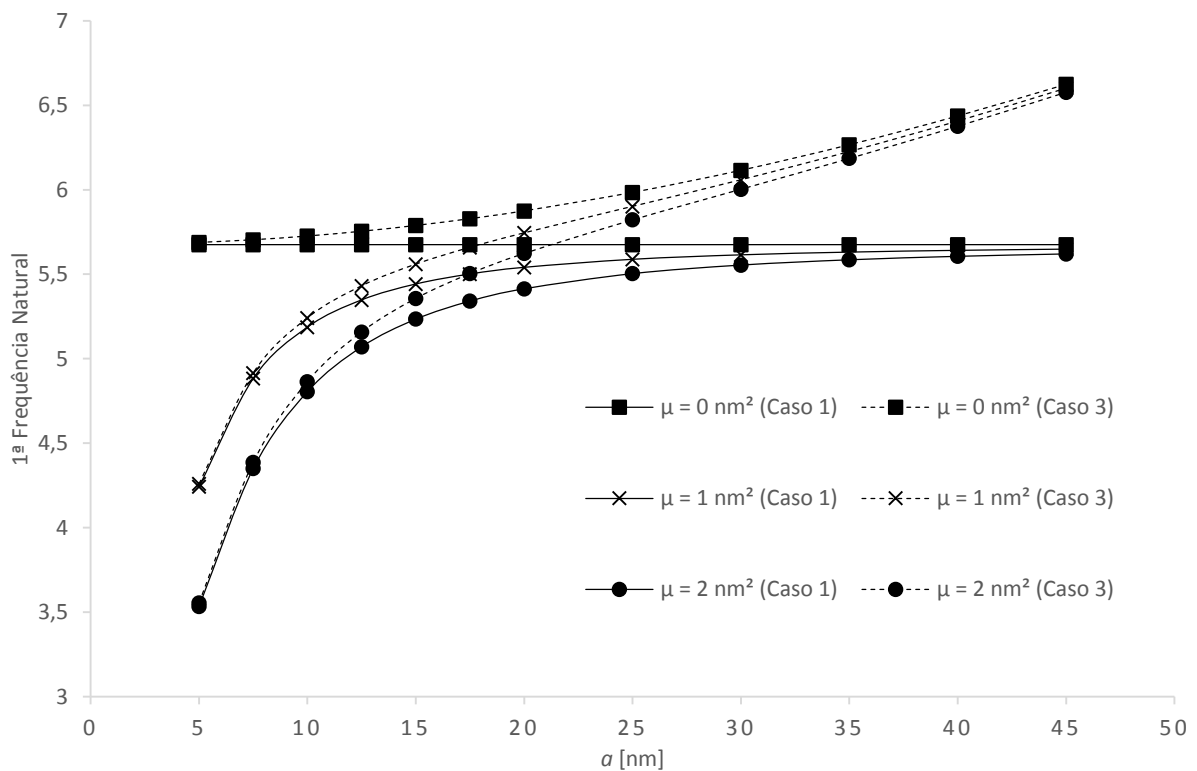


Figura 5.15 – Variação da primeira frequência natural adimensionalizada para os casos 1 e 3, tendo em conta diferentes valores do parâmetro não-local

Deste modo, foi possível compreender que para pequenas dimensões da nanoplaca (baixos valores de a), o parâmetro não-local exerce uma influência superior do que a exercida pelos

potenciais elétrico e magnético. Tal fenómeno é perceptível uma vez que já é conhecida a influência que os diferentes valores dos potenciais nas frequências naturais exercem no comportamento das frequências naturais, influência essa que se sobrepõe ao efeito do parâmetro não-local para comprimentos da nanoplaca entre os 15 e os 20 nanómetros, como se pode observar na figura 5.14.

A figura 5.16 ilustra a variação da primeira frequência natural face ao aumento do parâmetro não-local, tendo sido utilizada uma razão de frequências para realizar a comparação entre as frequências naturais para os três casos em estudo.

De modo a permitir uma melhor interpretação da figura, encontram-se registados na tabela 5.4 os valores das frequências naturais quando o parâmetro não-local assume um valor nulo. De referir que as frequências encontram-se expressas em GHz.

Tabela 5.4 – Valores da primeira frequência natural local (GHz) referentes à figura 5.16

	$a = 10 \text{ nm}$	$a = 20 \text{ nm}$	$a = 30 \text{ nm}$
Caso 1	19,52121	4,88030	2,16902
Caso 2	19,34572	4,70236	1,98665
Caso 3	19,69514	5,05199	2,33721

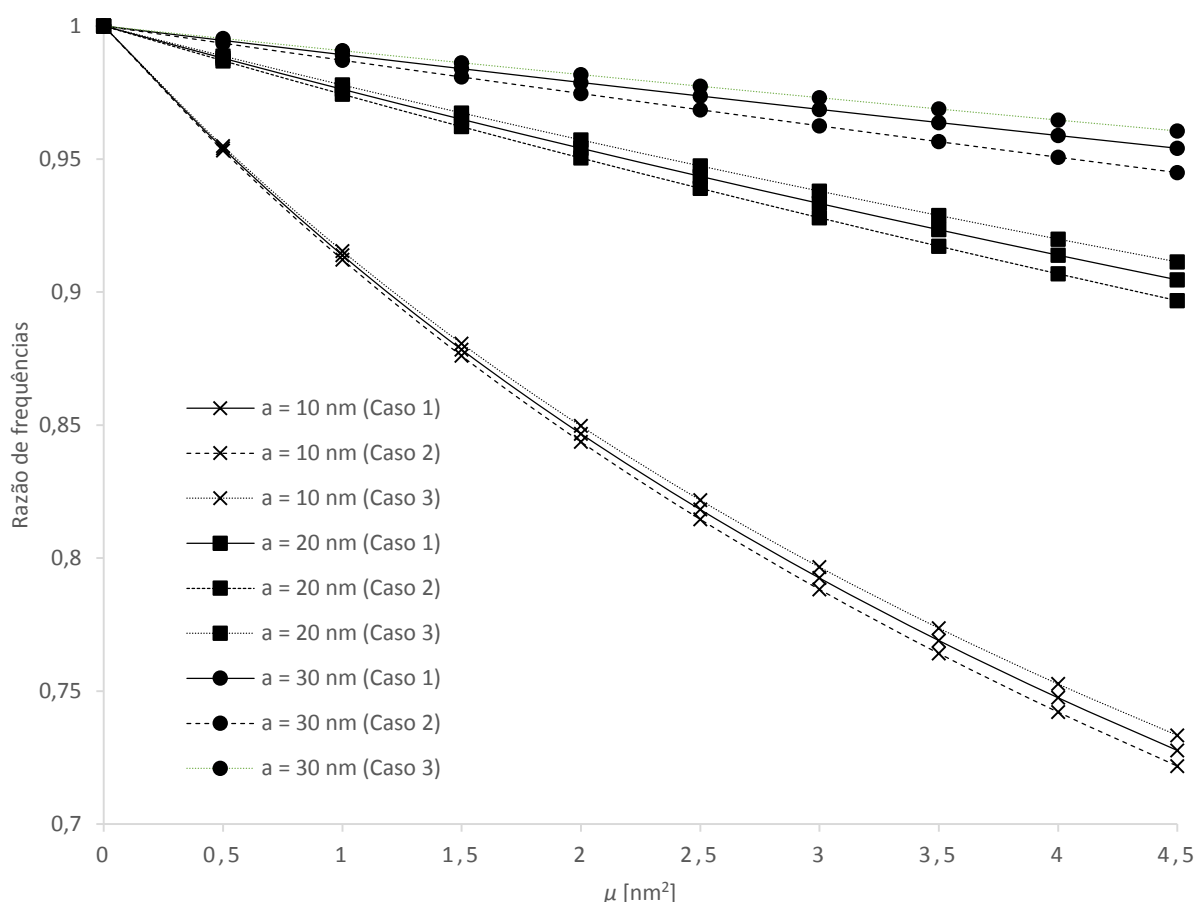


Figura 5.16 – Variação da razão de frequências para diferentes comprimentos, tendo em conta os vários casos de estudo

Através da análise da figura 5.16 é possível comprovar o que foi referido anteriormente, uma vez que se observa que o aumento do comprimento da nanoplaca provoca uma diminuição da influência do parâmetro não-local na variação da primeira frequência natural. É também possível verificar que uma nanoplaca sujeita a um potencial elétrico positivo e a um potencial magnético negativo (caso 2) é ligeiramente mais sensível ao aumento do parâmetro não-local do que uma nanoplaca sujeitas às condições referentes aos restantes casos, sendo que uma nanoplaca sujeita a um potencial elétrico negativo e a um potencial magnético negativo (caso 3) é a que apresenta a menor sensibilidade face ao aumento do parâmetro não-local.

A comparação da influência do parâmetro não-local nas quatro primeiras frequências naturais encontra-se ilustrada na figura 5.17, tendo sido considerados apenas os casos 2 e 3 por motivos de simplificação da figura, uma vez que se verificou, através da figura 5.16, que estes exibem um comportamento extremo quando comparados os três casos em análise. Assim sendo, encontram-se registados na tabela 5.5, os valores das frequências naturais quando o parâmetro não-local assume um valor nulo, estando as mesmas expressas em GHz.

Tabela 5.5 – Valores das várias frequências naturais locais (GHz) referentes à figura 5.17

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
Caso 2	19,34572	48,62801	48,62801	77,90995
Caso 3	19,69514	48,97742	48,97742	78,25936

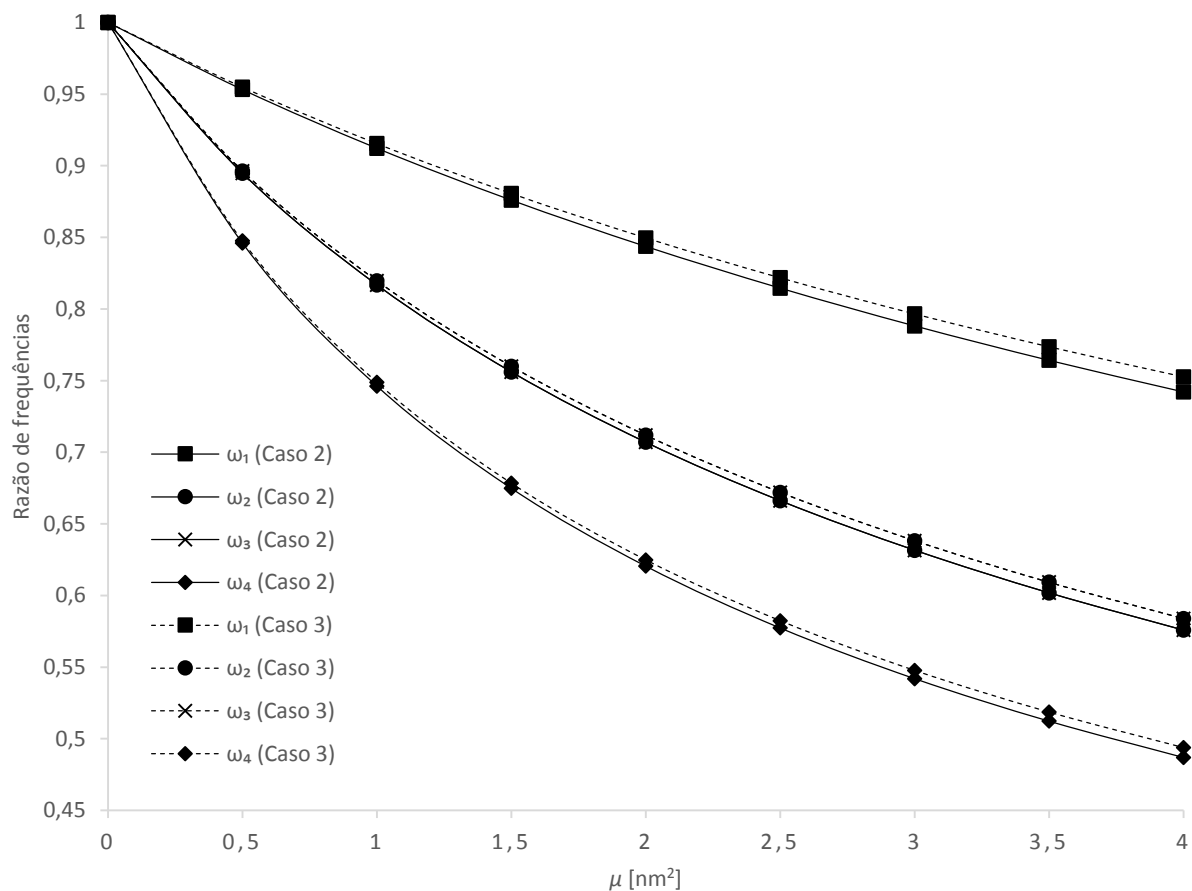


Figura 5.17 – Variação da razão de frequências referente a diferentes frequências naturais, para os vários os casos de estudo

Deste modo, foi possível verificar que a influência do parâmetro não-local nas várias frequências naturais de uma nanoplaca magneto-electro-elástica é semelhante ao exibido pelas restantes nanoplacas analisadas, em que quanto maior é a ordem da frequência, maior é a influência do parâmetro não-local no seu valor. Quanto às diferenças entre ambos os casos considerados, foi possível verificar novamente que uma nanoplaca sujeita às condições referentes ao caso 2 é ligeiramente mais sensível ao aumento do parâmetro não-local.

De referir que a segunda e a terceira frequência natural apresentam uma evolução semelhante, uma vez que correspondem a ondas sinusoidais simétricas (tal como já havia sido referido nos capítulos anteriores), sendo essa a razão pela qual as suas linhas se encontram sobrepostas.

5.6.3. Influência do meio elástico nas frequências naturais

A ordem de grandeza dos módulos do meio elástico (módulo de Winkler e módulo de corte de Pasternak) foi obtida a partir do artigo [76], sendo apresentados em seguida os seus valores máximos:

$$\begin{aligned} k_{w,max} &= 4.5 \times 10^{15} \text{ Pa/m} \\ k_{g,max} &= 4.5 \times 10^{-3} \text{ Pam} \end{aligned} \quad (5.35)$$

Deste modo, para que fosse possível analisar a influência dos diferentes módulos do meio elástico recorreu-se a uma razão de frequências, definida de acordo com a seguinte expressão:

$$\text{Razão de frequências} = \frac{\omega_{k_w=i}}{\omega_{k_w=k_{w,max}}} \quad (5.36)$$

As figuras 5.18 e 5.19 ilustram a variação da razão de frequências face ao aumento do módulo de Winkler e do módulo de corte de Pasternak, respetivamente, tendo sido considerado três valores diferentes do comprimento da nanoplaca. Foram obtidos resultados para os casos 2 e 3, uma vez que se tratam dos casos que potencialmente originariam os valores mais baixos e mais elevados das frequências naturais, respetivamente. Considerou-se que a nanoplaca se encontrava simplesmente apoiada. Assim sendo, encontram-se registados nas tabelas 5.6 e 5.7, os valores das frequências naturais quando os diferentes módulos assumem um valor máximo, estando as mesmas expressas em GHz.

Tabela 5.6 – Valores da primeira frequência natural (GHz) para o valor máximo de k_w referentes à figura 5.18

	$a = 10 \text{ nm}$	$a = 20 \text{ nm}$	$a = 30 \text{ nm}$
Caso 2	20,86174	9,11413	8,05618
Caso 3	21,18617	9,29935	8,14971

Tabela 5.7 – Valores da primeira frequência natural (GHz) para o valor máximo de k_g referentes à figura 5.19

	$a = 10 \text{ nm}$	$a = 20 \text{ nm}$	$a = 30 \text{ nm}$
Caso 2	19,65423	5,01200	2,29863
Caso 3	19,99827	5,34140	2,60757

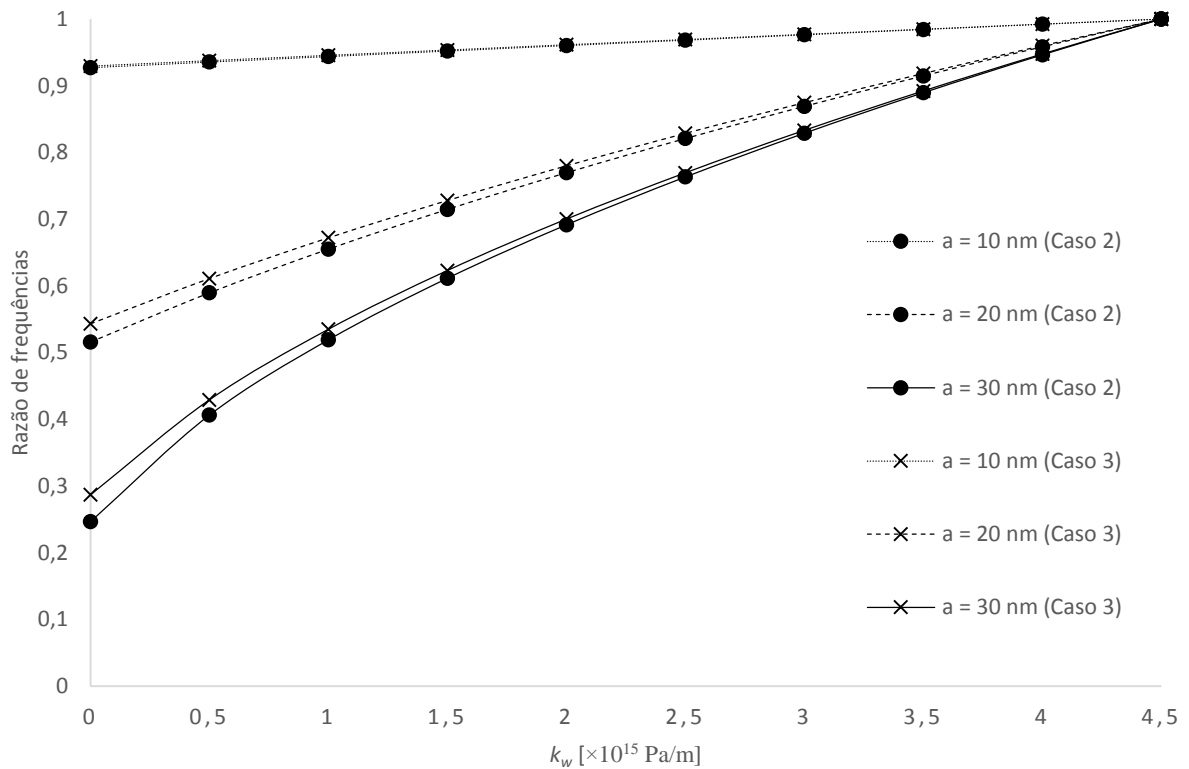


Figura 5.18 – Variação da razão de frequências com o aumento do módulo de Winkler, para os vários casos de estudo

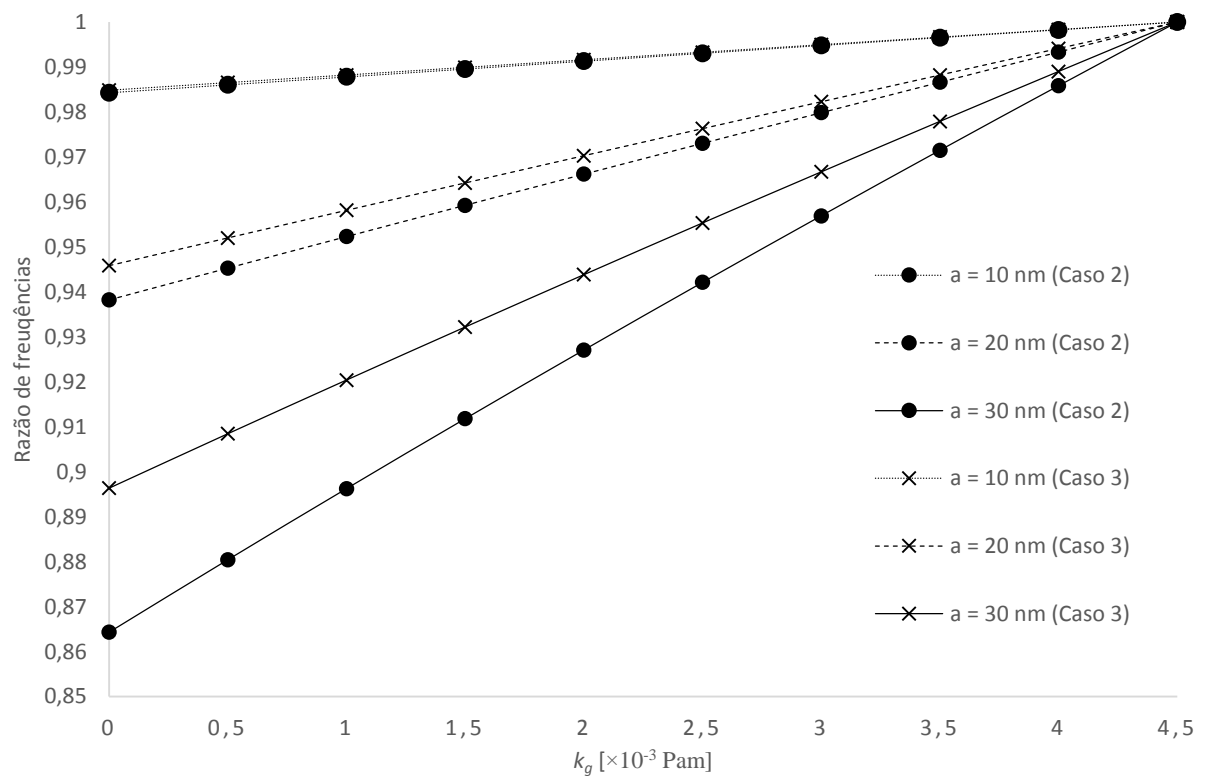


Figura 5.19 – Variação da razão de frequências com o aumento do módulo de corte de Pasternak, para os vários casos de estudo

Deste modo, foi possível verificar que a existência de um meio elástico provoca um aumento das frequências naturais da nanoplaca, sendo que o módulo de Winkler exerce uma maior influência nas frequências naturais do que o módulo de corte de Pasternak. Foi também possível verificar que o meio elástico exerce uma maior influência em nanoplacas sujeitas a um potencial elétrico negativo e a um potencial magnético positivo (caso 3).

Apesar de esta variação das frequências naturais contrariar o artigo de Li *et al.* [76], o aumento do valor das frequências naturais de uma placa face à existência de um meio elástico já havia sido comprovada por diversos autores, tal como se pode verificar pelas referências [84, 85].

Não serão apresentadas as formas de vibração para as nanoplacas magneto-electro-elásticas, uma vez que foi possível verificar que estas não sofrem alterações face às obtidas para as nanoplacas simples, ou seja, as suas formas de vibração são idênticas às presentes nas tabelas 3.15 e 3.16.

6. Considerações finais

6.1. Conclusões

O principal objetivo da dissertação consistiu em criar modelos capazes de estudar as vibrações de nanoplacas (tendo sido também realizada uma abordagem às nanovigas), mais concretamente, obter as suas frequências e formas naturais de vibração. Assim, e tendo em conta que os diferentes resultados obtidos são coerentes com os existentes na literatura, é possível concluir, em primeiro lugar, que a formulação dos vários modelos utilizados foi realizada com sucesso.

Ao longo do trabalho foram analisadas diferentes estruturas, tendo sido obtidas as frequências e formas naturais para cada uma delas, sempre com recurso a modelos numéricos formulados no *software Maple*. Deste modo, foi possível analisar o comportamento das frequências naturais face à variação de diferentes fatores.

Assim sendo, foi verificada a diminuição dos valores das frequências naturais face a um aumento das dimensões, tanto das nanovigas como para os diferentes tipos de nanoplacas estudados. No entanto, esta variação das frequências naturais face ao aumento das dimensões das nanoplacas em nada difere da variação das frequências naturais de uma placa, sendo que o principal foco de estudo foi compreender a influência do parâmetro não-local no comportamento das frequências naturais.

Deste modo, foi possível verificar que um aumento do valor do parâmetro não-local leva a uma diminuição do valor das frequências naturais, sendo que a influência do parâmetro não-local é inversamente proporcional às dimensões das estruturas (nanovigas e nanoplacas), ou seja, quanto menores as dimensões, maior é a influência exercida pelo parâmetro não-local. Ao analisar as nanovigas, foi possível observar que, à medida que o valor do parâmetro não-local aumenta, a evolução das frequências naturais assume um comportamento cada vez mais linear, verificando-se que o parâmetro não-local exerce uma maior influência sob as frequências naturais de ordem mais elevada. Tal conclusão foi comprovada na análise às nanoplacas, em

que se verificou que a razão de frequências referente às frequências de ordem mais elevada apresenta uma maior variação face ao aumento do parâmetro não-local.

No entanto, apesar de o parâmetro não-local exercer uma influência considerável nas diferentes estruturas, foi possível concluir que este não exerce qualquer efeito sob as diversas formas de vibração.

Quanto às diferentes condições de fronteira analisadas (apoio simples e encastramento), verificou-se que, tal como ocorre para as placas, a condição de encastramento gera valores mais elevados das frequências naturais do que a condição de apoio simples. No que diz respeito à sensibilidade ao aumento do parâmetro não-local, a condição de encastramento apresenta uma maior sensibilidade do que a condição de apoio simples, tal como foi possível verificar pela maior variação das várias razões de frequências, tanto para as nanovigas, como para as nanoplacas.

Um dos pontos em que as nanoplacas de dupla camada diferem das nanoplacas simples é a existência de formas de vibração em oposição de fase, em que as duas camadas da nanoplaca apresentam formas de vibração simétricas. Foi possível verificar que as frequências naturais associadas a estas formas de vibração são principalmente influenciadas pelas forças de van der Waals, uma vez que sofrem apenas pequenas variações com o aumento das dimensões da nanoplaca e com o aumento do parâmetro não-local. No entanto, as frequências naturais associadas às formas de vibração em fase são idênticas às primeiras frequências naturais de uma nanoplaca simples, permitindo assim concluir que estas frequências não são afetadas pelas forças de van der Waals.

O último caso de estudo foi o das nanoplacas magneto-electro-elásticas envolvidas num meio elástico de Pasternak, tendo sido verificado que a existência de um potencial elétrico positivo na superfície superior da nanoplaca gera frequências naturais mais elevadas do que as de uma nanoplaca simples, sendo que um potencial elétrico negativo provoca a diminuição das frequências naturais. Por outro lado, a existência de um potencial magnético positivo na superfície superior da nanoplaca provoca a diminuição do valor das frequências naturais, sendo que um potencial magnético negativo gera frequências naturais mais elevadas.

A influência do meio elástico foi também estudada, tendo sido concluído que a existência do mesmo provoca um aumento das frequências naturais, não exercendo, no entanto, influência sob as diversas formas de vibração da nanoplaca. Foi realizada a comparação entre a influência exercida pelos dois módulos constituintes do meio elástico de Pasternak, tendo sido possível verificar que o módulo de Winkler exerce uma influência superior sob as frequências naturais do que o módulo de corte de Pasternak.

6.2. Trabalhos futuros

Após a conclusão do trabalho e tendo em conta algumas simplificações e considerações realizadas no desenvolvimento do mesmo, procurou-se encontrar maneiras de melhorar os modelos e resultados obtidos. Em seguida serão apresentadas algumas ideias para trabalhos futuros.

Uma das primeiras sugestões consistiria na utilização de uma teoria de deformação de corte de primeira ordem, de modo a poderem ser consideradas geometrias não limitadas à razão entre a espessura e o comprimento da nanoplaca. Assim, e apesar de ter sido verificado que os termos

referentes a ρz^2 não exerciam uma influência significativa nos valores das frequências naturais, a sua inclusão num modelo posterior também não deixaria de ser interessante, uma vez que se teriam em conta o pleno das propriedades de uma nanoplaca. Seguindo a mesma linha de pensamento, a adaptação do modelo criado para nanoplacas ortotrópicas levaria a um aumento das possibilidades de análise do modelo.

Outro dos pontos a focar em possíveis trabalhos futuros seria a consideração de diferentes condições de fronteira para os vários lados da nanoplaca, de modo a permitir a análise de nanoplacas com uma determinada condição de fronteira segundo a direção x e outra condição segundo a direção y . A possibilidade de considerar que as nanoplacas se encontrariam livres de qualquer apoio em algum dos seus lados pode também ser encarada como uma possibilidade de continuação do trabalho realizado.

Uma vez que apenas foram analisadas nanoplacas de dupla camada, a criação de um modelo capaz de analisar nanoplacas com um determinado número de camadas (número esse que seria definido consoante a análise em questão) constituiria um avanço significativo face ao que foi realizado para as nanoplacas com mais de uma camada. Seguindo a linha de pensamento referente à consideração de diferentes condições de fronteira para os vários lados da nanoplaca, a possibilidade de considerar diferentes condições de fronteira para as diferentes camadas de uma nanoplaca permitiria expandir o número de casos possíveis de análise.

Por fim, a realização do estudo das vibrações de uma nanoplaca em regime forçado, obtendo a resposta em função da frequência e/ou ao longo do tempo, será provavelmente um dos pontos a focar num futuro próximo, uma vez que são escassos os estudos existentes sobre esta matéria na literatura atual.

Referências

1. Commission, E. *Nanotechnology - European Commision*. 2014 [acedido a 18 de Junho de 2014]; http://ec.europa.eu/nanotechnology/index_en.html.
2. Initiative, U.S.N.N. *National Nanotechnology Initiative*. 2014 [acedido a 18 de Junho de 2014]; <http://www.nano.gov/>.
3. Iijima, S., *Helical microtubules of graphitic carbon*. Nature, 1991. **354**(6348): p. 56-58.
4. Meyyapan, M., *Carbon Nanotubes: Science and Applications*. 2004: Taylor & Francis.
5. De Volder, M.F., S.H. Tawfick, R.H. Baughman, and A.J. Hart, *Carbon nanotubes: present and future commercial applications*. Science, 2013. **339**(6119): p. 535-539.
6. Zhang, Q., J.Q. Huang, W.Z. Qian, Y.Y. Zhang, and F. Wei, *The Road for Nanomaterials Industry: A Review of Carbon Nanotube Production, Post-Treatment, and Bulk Applications for Composites and Energy Storage*. Small, 2013. **9**(8): p. 1237-1265.
7. Choi, W., I. Lahiri, R. Seelaboyina, and Y.S. Kang, *Synthesis of graphene and its applications: a review*. Critical Reviews in Solid State and Materials Sciences, 2010. **35**(1): p. 52-71.
8. Matyba, P., H. Yamaguchi, G. Eda, M. Chhowalla, L. Edman, and N.D. Robinson, *Graphene and Mobile Ions: The Key to All-Plastic, Solution-Processed Light-Emitting Devices*. ACS Nano, 2010. **4**(2): p. 637-642.
9. Mukherjee, R., A.V. Thomas, A. Krishnamurthy, and N. Koratkar, *Photothermally reduced graphene as high-power anodes for lithium-ion batteries*. ACS nano, 2012. **6**(9): p. 7867-7878.
10. Jeon, I.-Y., et al., *Facile, scalable synthesis of edge-halogenated graphene nanoplatelets as efficient metal-free eletrocatalysts for oxygen reduction reaction*. Scientific reports, 2013. **3**.
11. Rafiee, M.A., J. Rafiee, I. Srivastava, Z. Wang, H. Song, Z.Z. Yu, and N. Koratkar, *Fracture and fatigue in graphene nanocomposites*. small, 2010. **6**(2): p. 179-183.
12. Shen, H., L. Zhang, M. Liu, and Z. Zhang, *Biomedical applications of graphene*. Theranostics, 2012. **2**(3): p. 283.

13. Song, Z., V.I. Artyukhov, B.I. Yakobson, and Z. Xu, *Pseudo Hall–Petch strength reduction in polycrystalline graphene*. Nano letters, 2013. **13**(4): p. 1829-1833.
14. Eringen, A.C., *Nonlocal Continuum Field Theories*. 2002, New York: Springer.
15. Eringen, A.C., *On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves*. Journal of Applied Physics, 1983. **54**(9): p. 4703-4710.
16. Reddy, J., *Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams*. International Journal of Engineering Science, 2007. **45**(2): p. 288-307.
17. Reddy, J. and S. Pang, *Nonlocal continuum theories of beams for the analysis of carbon nanotubes*. Journal of Applied Physics, 2008. **103**(2): p. 023511.
18. Aydogdu, M., *A general nonlocal beam theory: its application to nanobeam bending, buckling and vibration*. Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, 2009. **41**(9): p. 1651-1655.
19. Setoodeh, A., M. Khosrownejad, and P. Malekzadeh, *Exact nonlocal solution for postbuckling of single-walled carbon nanotubes*. Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, 2011. **43**(9): p. 1730-1737.
20. Li, C., C. Lim, J. Yu, and Q. Zeng, *Analytical solutions for vibration of simply supported nonlocal nanobeams with an axial force*. International Journal of Structural Stability and Dynamics, 2011. **11**(02): p. 257-271.
21. Santos, J. and J. Reddy, *Vibration of Timoshenko beams using non-classical elasticity theories*. Shock and Vibration, 2012. **19**(3): p. 251-256.
22. Ansari, R. and S. Sahmani, *Small scale effect on vibrational response of single-walled carbon nanotubes with different boundary conditions based on nonlocal beam models*. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2012. **17**(4): p. 1965-1979.
23. Eltaher, M., A.E. Alshorbagy, and F. Mahmoud, *Vibration analysis of Euler–Bernoulli nanobeams by using finite element method*. Applied Mathematical Modelling, 2013. **37**(7): p. 4787-4797.
24. Li, X.-F., B.-L. Wang, and Y.-W. Mai, *Effects of a surrounding elastic medium on flexural waves propagating in carbon nanotubes via nonlocal elasticity*. Journal of Applied Physics, 2008. **103**(7): p. 074309.
25. Ke, L., Y. Xiang, J. Yang, and S. Kitipornchai, *Nonlinear free vibration of embedded double-walled carbon nanotubes based on nonlocal Timoshenko beam theory*. Computational Materials Science, 2009. **47**(2): p. 409-417.
26. Murmu, T. and S. Pradhan, *Small-scale effect on the vibration of nonuniform nanocantilever based on nonlocal elasticity theory*. Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, 2009. **41**(8): p. 1451-1456.
27. Danesh, M., A. Farajpour, and M. Mohammadi, *Axial vibration analysis of a tapered nanorod based on nonlocal elasticity theory and differential quadrature method*. Mechanics Research Communications, 2012. **39**(1): p. 23-27.
28. Şimşek, M., *Nonlocal effects in the free longitudinal vibration of axially functionally graded tapered nanorods*. Computational Materials Science, 2012. **61**: p. 257-265.
29. Şimşek, M., *Large amplitude free vibration of nanobeams with various boundary conditions based on the nonlocal elasticity theory*. Composites Part B: Engineering, 2014. **56**(0): p. 621-628.
30. Ansari, R., V. Mohammadi, M. Faghih Shojaei, R. Gholami, and S. Sahmani, *On the forced vibration analysis of Timoshenko nanobeams based on the surface stress elasticity theory*. Composites Part B: Engineering, 2014. **60**(0): p. 158-166.
31. Bunch, J.S., A.M. Van Der Zande, S.S. Verbridge, I.W. Frank, D.M. Tanenbaum, J.M. Parpia, H.G. Craighead, and P.L. McEuen, *Electromechanical resonators from graphene sheets*. Science, 2007. **315**(5811): p. 490-493.

32. Sakhaee-Pour, A., M. Ahmadian, and A. Vafai, *Applications of single-layered graphene sheets as mass sensors and atomistic dust detectors*. Solid State Communications, 2008. **145**(4): p. 168-172.
33. Sakhaee-Pour, A., M. Ahmadian, and A. Vafai, *Potential application of single-layered graphene sheet as strain sensor*. Solid State Communications, 2008. **147**(7): p. 336-340.
34. Lu, P., P. Zhang, H. Lee, C. Wang, and J. Reddy, *Non-local elastic plate theories*. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science, 2007. **463**(2088): p. 3225-3240.
35. Reddy, J., *Nonlocal nonlinear formulations for bending of classical and shear deformation theories of beams and plates*. International Journal of Engineering Science, 2010. **48**(11): p. 1507-1518.
36. Aghababaei, R. and J. Reddy, *Nonlocal third-order shear deformation plate theory with application to bending and vibration of plates*. Journal of Sound and Vibration, 2009. **326**(1): p. 277-289.
37. Pradhan, S. and A. Kumar, *Vibration analysis of orthotropic graphene sheets using nonlocal elasticity theory and differential quadrature method*. Composite Structures, 2011. **93**(2): p. 774-779.
38. Murmu, T. and S. Pradhan, *Vibration analysis of nanoplates under uniaxial prestressed conditions via nonlocal elasticity*. Journal of Applied Physics, 2009. **106**(10): p. 104301.
39. Murmu, T. and S. Pradhan, *Vibration analysis of nano-single-layered graphene sheets embedded in elastic medium based on nonlocal elasticity theory*. Journal of Applied Physics, 2009. **105**(6): p. 064319.
40. Mahdavi, M.H., L.Y. Jiang, and X. Sun, *Nonlinear vibration and postbuckling analysis of a single layer graphene sheet embedded in a polymer matrix*. Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, 2012. **44**(7-8): p. 1708-1715.
41. Golmakani, M. and J. Rezatalab, *Nonlinear bending analysis of orthotropic nanoscale plates in an elastic matrix based on nonlocal continuum mechanics*. Composite Structures, 2014.
42. Arghavan, S. and A. Singh, *Free vibration of single layer graphene sheets: lattice structure versus continuum plate theories*. Journal of Nanotechnology in Engineering and Medicine, 2011. **2**(3): p. 031005.
43. Malekzadeh, P. and M. Shojaei, *Free vibration of nanoplates based on a nonlocal two-variable refined plate theory*. Composite Structures, 2013. **95**(0): p. 443-452.
44. Ansari, R., S. Sahmani, and B. Arash, *Nonlocal plate model for free vibrations of single-layered graphene sheets*. Physics Letters A, 2010. **375**(1): p. 53-62.
45. Ansari, R. and H. Rouhi, *An Explicit Nonlocal Frequency Formula for Monolayer Graphene Sheets*. International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics, 2013. **14**(1): p. 40-44.
46. Murmu, T. and S. Adhikari, *Nonlocal mass nanosensors based on vibrating monolayer graphene sheets*. Sensors and Actuators B: Chemical, 2013. **188**: p. 1319-1327.
47. Liang, Y. and Q. Han, *Prediction of the nonlocal scaling parameter for graphene sheet*. European Journal of Mechanics-A/Solids, 2014. **45**: p. 153-160.
48. Liu, C.-C. and Z.-B. Chen, *Dynamic analysis of finite periodic nanoplate structures with various boundaries*. Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, 2014. **60**: p. 139-146.
49. Assadi, A., *Size dependent forced vibration of nanoplates with consideration of surface effects*. Applied Mathematical Modelling, 2013. **37**(5): p. 3575-3588.
50. Kitipornchai, S., X. He, and K. Liew, *Continuum model for the vibration of multilayered graphene sheets*. Physical Review B, 2005. **72**(7): p. 075443.

51. He, X., S. Kitipornchai, and K. Liew, *Resonance analysis of multi-layered graphene sheets used as nanoscale resonators*. Nanotechnology, 2005. **16**(10): p. 2086.
52. Behfar, K. and R. Naghdabadi, *Nanoscale vibrational analysis of a multi-layered graphene sheet embedded in an elastic medium*. Composites Science and Technology, 2005. **65**(7): p. 1159-1164.
53. Pradhan, S. and J. Phadikar, *Nonlocal elasticity theory for vibration of nanoplates*. Journal of Sound and Vibration, 2009. **325**(1): p. 206-223.
54. Sarrami-Foroushani, S. and M. Azhari, *Nonlocal vibration and buckling analysis of single and multi-layered graphene sheets using finite strip method including van der Waals effects*. Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, 2014. **57**: p. 83-95.
55. Sobhy, M., *Generalized two-variable plate theory for multi-layered graphene sheets with arbitrary boundary conditions*. Acta Mechanica, 2014: p. 1-18.
56. Liu, H. and J. Yang, *Lamb waves in double-layered nanoplates*. Journal of Applied Physics, 2012. **111**(11): p. 113525.
57. Liew, K., X. He, and S. Kitipornchai, *Predicting nanovibration of multi-layered graphene sheets embedded in an elastic matrix*. Acta Materialia, 2006. **54**(16): p. 4229-4236.
58. Ansari, R., B. Arash, and H. Rouhi, *Vibration characteristics of embedded multi-layered graphene sheets with different boundary conditions via nonlocal elasticity*. Composite Structures, 2011. **93**(9): p. 2419-2429.
59. Wang, J., M. Tian, and X. He, *Analysis of free vibration of embedded multi-layered graphene sheets*. Procedia Engineering, 2012. **31**: p. 641-646.
60. Pradhan, S. and J. Phadikar, *Small scale effect on vibration of embedded multilayered graphene sheets based on nonlocal continuum models*. Physics Letters A, 2009. **373**(11): p. 1062-1069.
61. Babaei, H. and A. Shahidi, *Vibration of quadrilateral embedded multilayered graphene sheets based on nonlocal continuum models using the Galerkin method*. Acta Mechanica Sinica, 2011. **27**(6): p. 967-976.
62. Lin, R., *Nanoscale vibration characterization of multi-layered graphene sheets embedded in an elastic medium*. Computational Materials Science, 2012. **53**(1): p. 44-52.
63. Ansari, R., B. Arash, and H. Rouhi, *Nanoscale vibration analysis of embedded multi-layered graphene sheets under various boundary conditions*. Computational Materials Science, 2011. **50**(11): p. 3091-3100.
64. Ansari, R., R. Rajabiehfard, and B. Arash, *Nonlocal finite element model for vibrations of embedded multi-layered graphene sheets*. Computational Materials Science, 2010. **49**(4): p. 831-838.
65. Ghorbanpour Arani, A., A. Shiravand, M. Rahi, and R. Kolahchi, *Nonlocal vibration of coupled DLGS systems embedded on Visco-Pasternak foundation*. Physica B: Condensed Matter, 2012. **407**(21): p. 4123-4131.
66. Alibeigloo, A., *Three-dimensional free vibration analysis of multi-layered graphene sheets embedded in elastic matrix*. Journal of Vibration and Control, 2013. **19**(16): p. 2357-2371.
67. Arghavan, S. and A. Singh, *Effects of van der Waals interactions on the nonlinear vibration of multi-layered graphene sheets*. Journal of Physics D: Applied Physics, 2012. **45**(45): p. 455305.
68. Pan, E., *Exact solution for simply supported and multilayered magneto-electro-elastic plates*. Journal of Applied Mechanics, 2001. **68**(4): p. 608-618.
69. Pan, E. and P. Heyliger, *Free vibrations of simply supported and multilayered magneto-electro-elastic plates*. Journal of Sound and Vibration, 2002. **252**(3): p. 429-442.

70. Chen, W.Q., K. Yong Lee, and H.J. Ding, *On free vibration of non-homogeneous transversely isotropic magneto-electro-elastic plates*. Journal of Sound and Vibration, 2005. **279**(1–2): p. 237-251.
71. Xue, C., E. Pan, S. Zhang, and H. Chu, *Large deflection of a rectangular magnoelectroelastic thin plate*. Mechanics Research Communications, 2011. **38**(7): p. 518-523.
72. Wu, C.-P. and Y.-C. Lu, *A modified Pagano method for the 3D dynamic responses of functionally graded magneto-electro-elastic plates*. Composite Structures, 2009. **90**(3): p. 363-372.
73. Sladek, J., V. Sladek, S. Krahulec, and E. Pan, *Analyses of functionally graded plates with a magnoelectroelastic layer*. Smart Materials and Structures, 2013. **22**(3): p. 035003.
74. Li, Y. and J. Zhang, *Free vibration analysis of magnoelectroelastic plate resting on a Pasternak foundation*. Smart Materials and Structures, 2014. **23**(2): p. 025002.
75. Milazzo, A., *An equivalent single-layer model for magnoelectroelastic multilayered plate dynamics*. Composite Structures, 2012. **94**(6): p. 2078-2086.
76. Li, Y., Z. Cai, and S. Shi, *Buckling and free vibration of magnoelectroelastic nanoplate based on nonlocal theory*. Composite Structures, 2014. **111**: p. 522-529.
77. Reddy, J.N., *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics*. 2002: Wiley.
78. Rodrigues, J.D., *Apontamentos de Vibrações de Sistemas Mecânicos*. 2013, Porto: FEUP, DEMec.
79. Reddy, J.N., *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis, Second Edition*. 2004: Taylor & Francis.
80. Meirovitch, L., *Computational Methods in Structural Dynamics*. 1980: Springer.
81. Han, W., M. Petyt, and K.-M. Hsiao, *An investigation into geometrically nonlinear analysis of rectangular laminated plates using the hierarchical finite element method*. Finite elements in analysis and design, 1994. **18**(1): p. 273-288.
82. Leissa, A.W., *Vibration of Plates*. 1969: Scientific and Technical Information Division, National Aeronautics and Space Administration.
83. Pure, I.U.o. and A. Chemistry, *IUPAC Gold Book*. 2006: IUPAC.
84. Hsu, M.-H., *Vibration characteristics of rectangular plates resting on elastic foundations and carrying any number of sprung masses,*. International Journal of Applied Science and Engineering, 2006. **4**(1): p. 83-89.
85. Kågo, E. and J. Lellep, *Free vibrations of plates on elastic foundation*. Procedia Engineering, 2013. **57**: p. 489-496.

Anexos

Anexo A: Integração por partes de \mathbf{K}_w

$$\int_{-1}^1 f_i(\xi) \frac{\partial^4 f_j(\xi)}{\partial \xi^4} d\xi = f_i(\xi) \frac{\partial^3 f_j(\xi)}{\partial \xi^3} \Big|_{\xi=-1}^{\xi=1} - \int_{-1}^1 \frac{\partial f_i(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial^3 f_j(\xi)}{\partial \xi^3} d\xi$$

$$f_i(1) = 0 \quad \vee \quad \frac{\partial^3 f_j(\xi)}{\partial \xi^3} \Big|_{\xi=1} = 0$$

$$f_i(-1) = 0 \quad \vee \quad \frac{\partial^3 f_j(\xi)}{\partial \xi^3} \Big|_{\xi=-1} = 0$$

$$\int_{-1}^1 f_i(\xi) \frac{\partial^4 f_j(\xi)}{\partial \xi^4} d\xi = - \int_{-1}^1 \frac{\partial f_i(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial^3 f_j(\xi)}{\partial \xi^3} d\xi$$

$$- \int_{-1}^1 \frac{\partial f_i(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial^3 f_j(\xi)}{\partial \xi^3} d\xi = - \frac{\partial f_i(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial^2 f_j(\xi)}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=-1}^{\xi=1} + \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 f_i(\xi)}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 f_j(\xi)}{\partial \xi^2} d\xi$$

$$\frac{\partial f_j(\xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} = 0 \quad \vee \quad \frac{\partial^2 f_j(\xi)}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=1} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_j(\xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=-1} &= 0 \quad \vee \quad \frac{\partial^2 f_j(\xi)}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=-1} = 0 \\ - \int_{-1}^1 \frac{\partial f_i(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial^3 f_j(\xi)}{\partial \xi^3} d\xi &= \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 f_i(\xi)}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 f_j(\xi)}{\partial \xi^2} d\xi \\ \int_{-1}^1 f_i(\xi) \frac{\partial^4 f_j(\xi)}{\partial \xi^4} d\xi &= \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 f_i(\xi)}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 f_j(\xi)}{\partial \xi^2} d\xi \end{aligned}$$

Anexo B: Integração por partes de \mathbf{K}_{vv} e \mathbf{K}_{ww}

- \mathbf{K}_{vv}

$$\begin{aligned} K_{vv}[i, j] &= \frac{a}{b} \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 h_\alpha(\xi) h_\beta(\eta) \frac{\partial^2 (h_\theta(\xi) h_\zeta(\eta))}{\partial \xi^2} d\xi d\eta \\ &\quad + \frac{b}{a} Gh \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 h_\alpha(\xi) h_\beta(\eta) \frac{\partial^2 (h_\theta(\xi) h_\zeta(\eta))}{\partial \eta^2} d\xi d\eta \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 h_\alpha(\xi) h_\beta(\eta) \frac{\partial^2 (h_\theta(\xi) h_\zeta(\eta))}{\partial \xi^2} d\xi d\eta &= \int_{-1}^1 h_\alpha(\xi) \frac{\partial^2 h_\theta(\xi)}{\partial \xi^2} d\xi \times \int_{-1}^1 h_\beta(\eta) h_\zeta(\eta) d\eta \\ \int_{-1}^1 h_\alpha(\xi) \frac{\partial^2 h_\theta(\xi)}{\partial \xi^2} d\xi &= h_\alpha(\xi) \frac{\partial h_\theta(\xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=-1}^{\xi=1} - \int_{-1}^1 \frac{\partial h_\alpha(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial h_\theta(\xi)}{\partial \xi} d\xi \\ h_\alpha(1) &= 0 \quad \vee \quad \frac{\partial h_\theta(\xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} = 0 \\ h_\alpha(-1) &= 0 \quad \vee \quad \frac{\partial h_\theta(\xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=-1} = 0 \\ \int_{-1}^1 h_\alpha(\xi) \frac{\partial^2 h_\theta(\xi)}{\partial \xi^2} d\xi &= - \int_{-1}^1 \frac{\partial h_\alpha(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial h_\theta(\xi)}{\partial \xi} d\xi \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 h_{\alpha}(\xi) h_{\beta}(\eta) \frac{\partial^2 (h_{\theta}(\xi) h_{\zeta}(\eta))}{\partial \xi^2} d\xi d\eta = - \int_{-1}^1 \frac{\partial h_{\alpha}(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial h_{\theta}(\xi)}{\partial \xi} d\xi \times \int_{-1}^1 h_{\beta}(\eta) h_{\zeta}(\eta) d\eta$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 h_{\alpha}(\xi) h_{\beta}(\eta) \frac{\partial^2 (h_{\theta}(\xi) h_{\zeta}(\eta))}{\partial \eta^2} d\xi d\eta = \int_{-1}^1 h_{\alpha}(\xi) h_{\theta}(\xi) d\xi \times \int_{-1}^1 h_{\beta}(\eta) \frac{\partial^2 h_{\zeta}(\eta)}{\partial \eta^2} d\eta$$

$$\int_{-1}^1 h_{\beta}(\eta) \frac{\partial^2 h_{\zeta}(\eta)}{\partial \eta^2} d\eta = h_{\beta}(\eta) \frac{\partial h_{\zeta}(\eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=-1}^{\eta=1} - \int_{-1}^1 \frac{\partial h_{\beta}(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial h_{\zeta}(\eta)}{\partial \eta} d\eta$$

$$h_{\beta}(1) = 0 \quad \vee \quad \frac{\partial h_{\zeta}(\eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} = 0$$

$$h_{\beta}(-1) = 0 \quad \vee \quad \frac{\partial h_{\zeta}(\eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=-1} = 0$$

$$\int_{-1}^1 h_{\beta}(\eta) \frac{\partial^2 h_{\zeta}(\eta)}{\partial \eta^2} d\eta = - \int_{-1}^1 \frac{\partial h_{\beta}(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial h_{\zeta}(\eta)}{\partial \eta} d\eta$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 h_{\alpha}(\xi) h_{\beta}(\eta) \frac{\partial^2 (h_{\theta}(\xi) h_{\zeta}(\eta))}{\partial \eta^2} d\xi d\eta = - \int_{-1}^1 h_{\alpha}(\xi) h_{\theta}(\xi) d\xi \times \int_{-1}^1 \frac{\partial h_{\theta}(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial h_{\zeta}(\eta)}{\partial \eta} d\eta$$

• **K_{ww}**

$$\begin{aligned} K_{ww}[i, j] &= \frac{4b}{a^3} D \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_{\alpha}(\xi) f_{\beta}(\eta) \frac{\partial^4 (f_{\theta}(\xi) f_{\zeta}(\eta))}{\partial \xi^4} d\xi d\eta \\ &\quad + \frac{8}{ab} D \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_{\alpha}(\xi) f_{\beta}(\eta) \frac{\partial^4 (f_{\theta}(\xi) f_{\zeta}(\eta))}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} d\xi d\eta \\ &\quad + \frac{4a}{b^3} D \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_{\alpha}(\xi) f_{\beta}(\eta) \frac{\partial^4 (f_{\theta}(\xi) f_{\zeta}(\eta))}{\partial \eta^4} d\xi d\eta \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_{\alpha}(\xi) f_{\beta}(\eta) \frac{\partial^4 (f_{\theta}(\xi) f_{\zeta}(\eta))}{\partial \xi^4} d\xi d\eta = \int_{-1}^1 f_{\alpha}(\xi) \frac{\partial^4 f_{\theta}(\xi)}{\partial \xi^4} d\xi \times \int_{-1}^1 f_{\beta}(\eta) f_{\zeta}(\eta) d\eta$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 f_{\alpha}(\xi) \frac{\partial^4 f_{\theta}(\xi)}{\partial \xi^4} d\xi &= \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 f_{\alpha}(\xi)}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 f_{\theta}(\xi)}{\partial \xi^2} d\xi \\
\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_{\alpha}(\xi) f_{\beta}(\eta) \frac{\partial^4 (f_{\theta}(\xi) f_{\zeta}(\eta))}{\partial \xi^4} d\xi d\eta &= \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 f_{\alpha}(\xi)}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 f_{\theta}(\xi)}{\partial \xi^2} d\xi \times \int_{-1}^1 f_{\beta}(\eta) f_{\zeta}(\eta) d\eta \\
\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_{\alpha}(\xi) f_{\beta}(\eta) \frac{\partial^4 (f_{\theta}(\xi) f_{\zeta}(\eta))}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} d\xi d\eta &= \int_{-1}^1 f_{\alpha}(\xi) \frac{\partial^2 f_{\theta}(\xi)}{\partial \xi^2} d\xi \times \int_{-1}^1 f_{\beta}(\eta) \frac{\partial^2 f_{\zeta}(\eta)}{\partial \eta^2} d\eta \\
\int_{-1}^1 f_{\alpha}(\xi) \frac{\partial^2 f_{\theta}(\xi)}{\partial \xi^2} d\xi &= - \int_{-1}^1 \frac{\partial f_{\alpha}(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial f_{\theta}(\xi)}{\partial \xi} d\xi \\
\int_{-1}^1 f_{\beta}(\eta) \frac{\partial^2 f_{\zeta}(\eta)}{\partial \eta^2} d\eta &= - \int_{-1}^1 \frac{\partial f_{\beta}(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial f_{\zeta}(\eta)}{\partial \eta} d\eta \\
\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_{\alpha}(\xi) f_{\beta}(\eta) \frac{\partial^4 (f_{\theta}(\xi) f_{\zeta}(\eta))}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} d\xi d\eta &= \int_{-1}^1 \frac{\partial f_{\alpha}(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial f_{\theta}(\xi)}{\partial \xi} d\xi \times \int_{-1}^1 \frac{\partial f_{\beta}(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial f_{\zeta}(\eta)}{\partial \eta} d\eta \\
\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_{\alpha}(\xi) f_{\beta}(\eta) \frac{\partial^4 (f_{\theta}(\xi) f_{\zeta}(\eta))}{\partial \eta^4} d\xi d\eta &= \int_{-1}^1 f_{\alpha}(\xi) f_{\theta}(\xi) d\xi \times \int_{-1}^1 f_{\beta}(\eta) \frac{\partial^4 f_{\zeta}(\eta)}{\partial \eta^4} d\eta \\
\int_{-1}^1 f_{\beta}(\eta) \frac{\partial^4 f_{\zeta}(\eta)}{\partial \eta^4} d\eta &= \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 f_{\beta}(\eta)}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 f_{\zeta}(\eta)}{\partial \eta^2} d\eta \\
\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_{\alpha}(\xi) f_{\beta}(\eta) \frac{\partial^4 (f_{\theta}(\xi) f_{\zeta}(\eta))}{\partial \eta^4} d\xi d\eta &= \int_{-1}^1 f_{\alpha}(\xi) f_{\theta}(\xi) d\xi \times \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 f_{\beta}(\eta)}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 f_{\zeta}(\eta)}{\partial \eta^2} d\eta
\end{aligned}$$

Anexo C: Operadores diferenciais para as nanoplacas de dupla camada

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{u_1}(u_1(x, y, t)) = \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\nu Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(Gh \frac{\partial u_1}{\partial y} + Gh \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) - \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \rho h \mu \nabla^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}_{v_1}(v_1(x, y, t)) = \\
& = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\nu Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(Gh \frac{\partial u_1}{\partial y} + Gh \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) - \rho h \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} - \rho h \mu \nabla^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} \\
& \mathcal{L}_{u_2}(u_2(x, y, t)) = \\
& = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\nu Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(Gh \frac{\partial u_2}{\partial y} + Gh \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) - \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \rho h \mu \nabla^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \\
& \mathcal{L}_{v_2}(v_2(x, y, t)) = \\
& = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\nu Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(Gh \frac{\partial u_2}{\partial y} + Gh \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) - \rho h \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} - \rho h \mu \nabla^2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2}
\end{aligned}$$

Anexo D: Componentes da matriz de massa para nanoplacas de dupla camada

$$\begin{aligned}
M_{u_1 u_1}[i, j] &= -\frac{ab}{4} \rho h \int_{-1}^1 g_\alpha(\xi) g_\theta(\xi) d\xi \times \int_{-1}^1 g_\beta(\eta) g_\zeta(\eta) d\eta \\
&\quad - \frac{b}{a} \mu \rho h \int_{-1}^1 \frac{\partial g_\alpha(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial g_\theta(\xi)}{\partial \xi} d\xi \times \int_{-1}^1 g_\beta(\eta) g_\zeta(\eta) d\eta \\
&\quad - \frac{a}{b} \mu \rho h \int_{-1}^1 g_\alpha(\xi) g_\theta(\xi) d\xi \times \int_{-1}^1 \frac{\partial g_\beta(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial g_\zeta(\eta)}{\partial \eta} d\eta \\
M_{v_1 v_1}[i, j] &= -\frac{ab}{4} \rho h \int_{-1}^1 h_\alpha(\xi) h_\theta(\xi) d\xi \times \int_{-1}^1 h_\beta(\eta) h_\zeta(\eta) d\eta \\
&\quad - \frac{b}{a} \mu \rho h \int_{-1}^1 \frac{\partial h_\alpha(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial h_\theta(\xi)}{\partial \xi} d\xi \times \int_{-1}^1 h_\beta(\eta) h_\zeta(\eta) d\eta \\
&\quad - \frac{a}{b} \mu \rho h \int_{-1}^1 h_\alpha(\xi) h_\theta(\xi) d\xi \times \int_{-1}^1 \frac{\partial h_\beta(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial h_\zeta(\eta)}{\partial \eta} d\eta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{w_1 w_1}[i, j] = & -\frac{ab}{4} \rho h \int_{-1}^1 f_\alpha(\xi) f_\theta(\xi) d\xi \times \int_{-1}^1 f_\beta(\eta) f_\zeta(\eta) d\eta \\
& -\frac{b}{a} \mu \rho h \int_{-1}^1 \frac{\partial f_\alpha(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial f_\theta(\xi)}{\partial \xi} d\xi \times \int_{-1}^1 f_\beta(\eta) f_\zeta(\eta) d\eta \\
& -\frac{a}{b} \mu \rho h \int_{-1}^1 f_\alpha(\xi) f_\theta(\xi) d\xi \times \int_{-1}^1 \frac{\partial f_\beta(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial f_\zeta(\eta)}{\partial \eta} d\eta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{u_2 u_2}[i, j] = & -\frac{ab}{4} \rho h \int_{-1}^1 k_\alpha(\xi) k_\theta(\xi) d\xi \times \int_{-1}^1 k_\beta(\eta) k_\zeta(\eta) d\eta \\
& -\frac{b}{a} \mu \rho h \int_{-1}^1 \frac{\partial k_\alpha(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial k_\theta(\xi)}{\partial \xi} d\xi \times \int_{-1}^1 k_\beta(\eta) k_\zeta(\eta) d\eta \\
& -\frac{a}{b} \mu \rho h \int_{-1}^1 k_\alpha(\xi) k_\theta(\xi) d\xi \times \int_{-1}^1 \frac{\partial k_\beta(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial k_\zeta(\eta)}{\partial \eta} d\eta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{v_2 v_2}[i, j] = & -\frac{ab}{4} \rho h \int_{-1}^1 t_\alpha(\xi) t_\theta(\xi) d\xi \times \int_{-1}^1 t_\beta(\eta) t_\zeta(\eta) d\eta \\
& -\frac{b}{a} \mu \rho h \int_{-1}^1 \frac{\partial t_\alpha(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial t_\theta(\xi)}{\partial \xi} d\xi \times \int_{-1}^1 t_\beta(\eta) t_\zeta(\eta) d\eta \\
& -\frac{a}{b} \mu \rho h \int_{-1}^1 t_\alpha(\xi) t_\theta(\xi) d\xi \times \int_{-1}^1 \frac{\partial t_\beta(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial t_\zeta(\eta)}{\partial \eta} d\eta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{w_2 w_2}[i, j] = & -\frac{ab}{4} \rho h \int_{-1}^1 r_\alpha(\xi) r_\theta(\xi) d\xi \times \int_{-1}^1 r_\beta(\eta) r_\zeta(\eta) d\eta \\
& -\frac{b}{a} \mu \rho h \int_{-1}^1 \frac{\partial r_\alpha(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial r_\theta(\xi)}{\partial \xi} d\xi \times \int_{-1}^1 r_\beta(\eta) r_\zeta(\eta) d\eta \\
& -\frac{a}{b} \mu \rho h \int_{-1}^1 r_\alpha(\xi) r_\theta(\xi) d\xi \times \int_{-1}^1 \frac{\partial r_\beta(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial r_\zeta(\eta)}{\partial \eta} d\eta
\end{aligned}$$

Anexo E: Equação de movimento sob a forma matricial para nanoplacas de dupla camada

$$\begin{bmatrix}
 M_{u_1 u_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & M_{v_1 v_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & M_{w_1 w_1} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & M_{u_2 u_2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & M_{v_2 v_2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{w_2 w_2}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \ddot{q}_{u_1}(t) \\
 \ddot{q}_{v_1}(t) \\
 \ddot{q}_{w_1}(t) \\
 \ddot{q}_{u_2}(t) \\
 \ddot{q}_{v_2}(t) \\
 \ddot{q}_{w_2}(t)
 \end{Bmatrix}
 +
 \begin{bmatrix}
 K_{u_1 u_1} & K_{u_1 v_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 K_{v_1 u_1} & K_{v_1 v_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & K_{w_1 w_1} & 0 & 0 & K_{w_1 w_2} \\
 0 & 0 & 0 & K_{u_2 u_2} & K_{u_2 v_2} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & K_{v_2 u_2} & K_{v_2 v_2} & 0 \\
 0 & 0 & K_{w_2 w_1} & 0 & 0 & K_{w_2 w_2}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 q_{u_1}(t) \\
 q_{v_1}(t) \\
 q_{w_1}(t) \\
 q_{u_2}(t) \\
 q_{v_2}(t) \\
 q_{w_2}(t)
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{Bmatrix}$$

Anexo F: Definição dos esforços para nanoplacas magneto-electro-elásticas

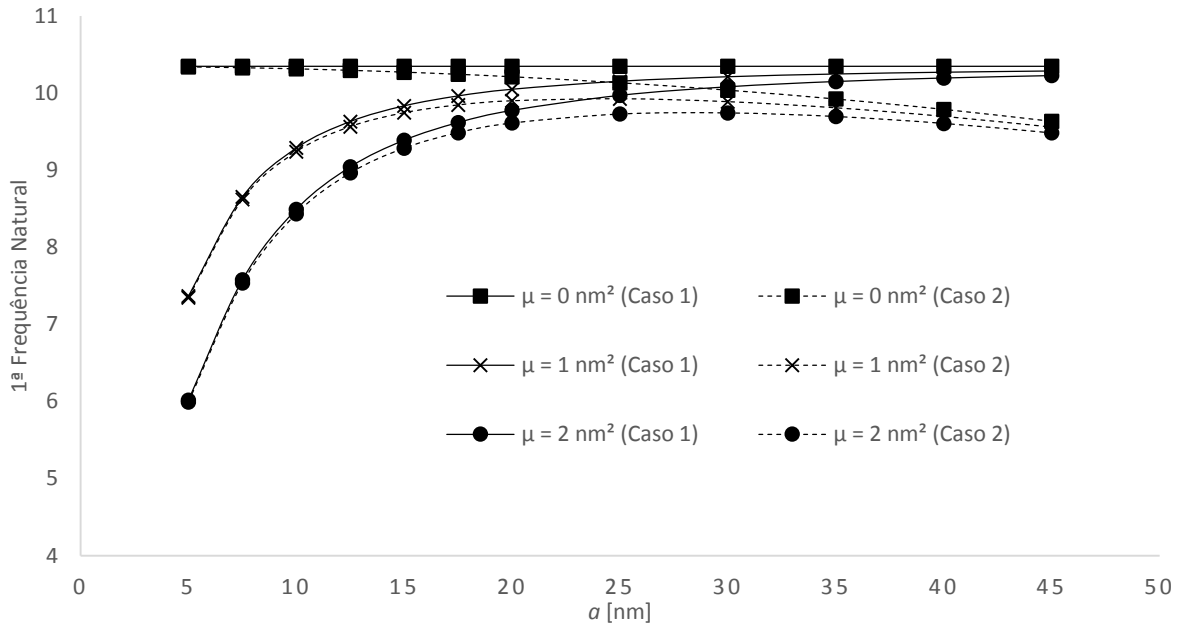
$$\begin{aligned}
 N_{xx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{E\nu}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - e_{31} \left(M_1 z \Delta + \frac{V_0}{h} \right) \\
 &\quad - f_{31} \left(M_2 z \Delta + \frac{\Omega_0}{h} \right) dz = \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{E\nu h}{1-\nu^2} \frac{\partial v}{\partial y} - e_{31} V_0 - f_{31} \Omega_0 \\
 N_{yy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{E\nu}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - e_{31} \left(M_1 z \Delta + \frac{V_0}{h} \right) \\
 &\quad - f_{31} \left(M_2 z \Delta + \frac{\Omega_0}{h} \right) dz = \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{E\nu h}{1-\nu^2} \frac{\partial u}{\partial x} - e_{31} V_0 - f_{31} \Omega_0
 \end{aligned}$$

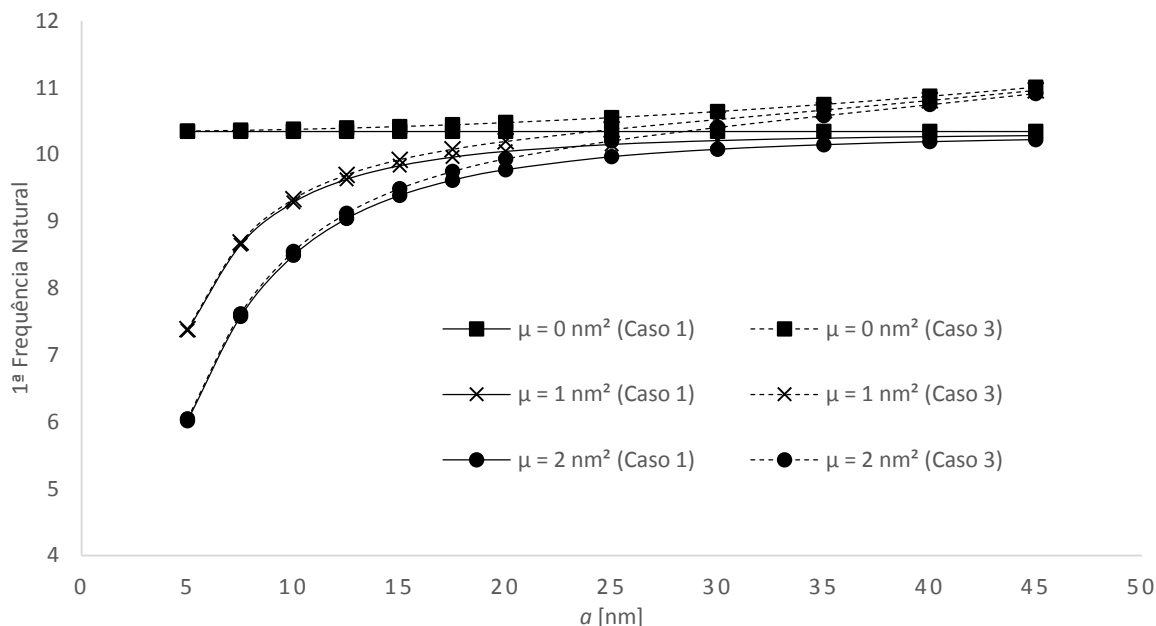
Anexo G: Expressões de $\mathbf{K}_{ww}^{\text{material}}$, $\mathbf{K}_{ww}^{\text{meio}}$ e $\mathbf{K}_{ww}^{\text{forças}}$

$$\begin{aligned}
K_{ww}^{\text{material}}[i, j] = & \\
= & \frac{4b}{a^3} \left(D - \frac{h^3}{12} e_{31} M_1 - \frac{h^3}{12} f_{31} M_2 \right) \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 f_\alpha(\xi)}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 f_\theta(\xi)}{\partial \xi^2} d\xi \times \int_{-1}^1 f_\beta(\eta) f_\zeta(\eta) d\eta \\
& + \frac{4}{ab} 2 \left(D - \frac{h^3}{12} e_{31} M_1 - \frac{h^3}{12} f_{31} M_2 \right) \int_{-1}^1 \frac{\partial f_\alpha(\eta\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial f_\theta(\xi)}{\partial \xi} d\xi \times \int_{-1}^1 \frac{\partial f_\beta(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial f_\zeta(\eta)}{\partial \eta} d\eta \\
& + \frac{4a}{b^3} \left(D - \frac{h^3}{12} e_{31} M_1 - \frac{h^3}{12} f_{31} M_2 \right) \int_{-1}^1 f_\alpha(\xi) f_\theta(\xi) d\xi \times \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 f_\beta(\eta)}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 f_\zeta(\eta)}{\partial \eta^2} d\eta \\
\\
K_{ww}^{\text{meio}}[i, j] = & \frac{ab}{4} k_w \int_{-1}^1 f_\alpha(\xi) f_\theta(\xi) d\xi \times \int_{-1}^1 f_\beta(\eta) f_\zeta(\eta) d\eta + \frac{b}{a} \mu k_w \int_{-1}^1 \frac{\partial f_\alpha(\eta\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial f_\theta(\xi)}{\partial \xi} d\xi \\
& \times \int_{-1}^1 f_\beta(\eta) f_\zeta(\eta) d\eta + \frac{a}{b} \mu k_w \int_{-1}^1 f_\alpha(\xi) f_\theta(\xi) d\xi \times \int_{-1}^1 \frac{\partial f_\beta(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial f_\zeta(\eta)}{\partial \eta} d\eta \\
& + \frac{b}{a} k_g \int_{-1}^1 \frac{\partial f_\alpha(\eta\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial f_\theta(\xi)}{\partial \xi} d\xi \times \int_{-1}^1 f_\beta(\eta) f_\zeta(\eta) d\eta + \frac{a}{b} k_g \int_{-1}^1 f_\alpha(\xi) f_\theta(\xi) d\xi \\
& \times \int_{-1}^1 \frac{\partial f_\beta(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial f_\zeta(\eta)}{\partial \eta} d\eta + \frac{4b}{a^3} \mu k_g \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 f_\alpha(\xi)}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 f_\theta(\xi)}{\partial \xi^2} d\xi \times \int_{-1}^1 f_\beta(\eta) f_\zeta(\eta) d\eta \\
& + \frac{4}{ab} 2 \mu k_g \int_{-1}^1 \frac{\partial f_\alpha(\eta\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial f_\theta(\xi)}{\partial \xi} d\xi \times \int_{-1}^1 \frac{\partial f_\beta(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial f_\zeta(\eta)}{\partial \eta} d\eta \\
& + \frac{4a}{b^3} \mu k_g \int_{-1}^1 f_\alpha(\xi) f_\theta(\xi) d\xi \times \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 f_\beta(\eta)}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 f_\zeta(\eta)}{\partial \eta^2} d\eta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{ww}^{forças}[i,j] = & \frac{b}{a}(N_{xe} + N_{xa}) \int_{-1}^1 \frac{\partial f_{\alpha}(\eta\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial f_{\theta}(\xi)}{\partial \xi} d\xi \times \int_{-1}^1 f_{\beta}(\eta) f_{\zeta}(\eta) d\eta \\
& + \frac{4b}{a^3} \mu(N_{xe} + N_{xa}) \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 f_{\alpha}(\xi)}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 f_{\theta}(\xi)}{\partial \xi^2} d\xi \times \int_{-1}^1 f_{\beta}(\eta) f_{\zeta}(\eta) d\eta \\
& + \frac{4}{ab} \mu(N_{xe} + N_{xa}) \int_{-1}^1 \frac{\partial f_{\alpha}(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial f_{\theta}(\xi)}{\partial \xi} d\xi \times \int_{-1}^1 \frac{\partial f_{\beta}(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial f_{\zeta}(\eta)}{\partial \eta} d\eta \\
& + \frac{a}{b}(N_{ye} + N_{ya}) \int_{-1}^1 f_{\alpha}(\xi) f_{\theta}(\xi) d\xi \times \int_{-1}^1 \frac{\partial f_{\beta}(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial f_{\zeta}(\eta)}{\partial \eta} d\eta \\
& + \frac{4}{ab} \mu(N_{ye} + N_{ya}) \int_{-1}^1 \frac{\partial f_{\alpha}(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial f_{\theta}(\xi)}{\partial \xi} d\xi \times \int_{-1}^1 \frac{\partial f_{\beta}(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial f_{\zeta}(\eta)}{\partial \eta} d\eta \\
& + \frac{4a}{b^3} \mu(N_{ye} + N_{ya}) \int_{-1}^1 f_{\alpha}(\xi) f_{\theta}(\xi) d\xi \times \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 f_{\beta}(\eta)}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 f_{\zeta}(\eta)}{\partial \eta^2} d\eta
\end{aligned}$$

Anexo H: Gráficos referentes a nanoplacas magneto-electro-elásticas encastradas





Anexo I: Autorização da IOP Publishing

Assunto	Re: Publishing rights - Permission
Remetente	Permissions
Para	em09016
Data	23.06.2014 09:33

Dear Mário Oliveira,

Thank you for your request to reproduce IOP Publishing material.

Figures 3 & 9 - Smart Materials and Structures 23 2014 025002

We are happy to grant permission for the use you request on the terms set out below.

If you have any questions, please feel free to contact our Permissions team at permissions@iop.org.

I should be grateful if you would acknowledge receipt of this email.

Kind regards,

Lucy Evans
Publishing Assistant
IOP Publishing

Conditions

Non-exclusive, non-transferrable, revocable, worldwide, permission to use the material in print and electronic form will be granted **subject to the following conditions:**

- Permission will be cancelled without notice if you fail to fulfil any of the conditions of this letter.
- You will make reasonable efforts to contact the author(s) to seek consent for your intended use. Contacting one author acting expressly as authorised agent for their co-authors is acceptable.
- You will reproduce the following prominently alongside the material:
 - the source of the material, including author, article title, title of journal, volume number, issue number (if relevant), page range (or first page if this is the only information available) and date of first publication. This information can be contained in a footnote or reference note; or
 - a link back to the article (via DOI); and
 - if practical and IN ALL CASES for works published under any of the Creative Commons licences the words "© IOP Publishing. Reproduced by permission of IOP Publishing. All rights reserved"
- The material will not, without the express permission of the author(s), be used in any way which, in the opinion of IOP Publishing, could distort or alter the author(s)' original intention(s) and meaning, be prejudicial to the honour or reputation of the author(s) and/or imply endorsement by the author(s) and/or IOP Publishing.
- Payment of £0 is received in full by IOP Publishing prior to use.

Please note: We do not usually provide signed permission forms as a separate attachment. Please print this email and provide it to your publisher as proof of permission.